RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN-TIARET

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Cours de Probabilité

2^{me} Année LMD

Mathématiques

Réalisé par

Dr **Hamza DAOUDI**

Expertisé par :

Dr **Abdelhak CHOUAF** - Université Sidi Bel Abbès.

Dr **Badreddine AZZOUZI** - Université Tlemcen.

Département de Mathématiques
hamza.daoudi@univ-tiaret.dz
Faculté des mathématiques et informatique
Bp 78 zaâroura 14000, Tiaret

Ce travail est dédiée à toute ma famille...
et mes meilleurs amis...

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

En mathématiques, l'étude des probabilités(du latin probabilitas) est un sujet de grande importance donnant lieu à de nombreuses applications. Le calcule de probabilité est une étude de phénomène aléatoire ou non déterministe ou bien, elle est une évaluation du caractère probable d'un évènement.
La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1. Plus ce nombre est grand, plus le risque (ou la chance) que l'événement se produise est grand.
A l'origine, dans les traductions d'Aristote, le mot "probabilité" ne désigne pas une quantification du caractère aléatoire d'un fait mais l'idée qu'une idée est communément admise par tous. Ce n'est que au cours du Moyen Age puis de la Renaissance autour des commentaires successifs et des imprécisions de traduction de l'IJuvre d'Aristote que ce terme connaîtra un glissement sémantique pour finir par désigner la vraisemblance d'une idée. Au 16 siècle puis au 17 siècle c'est ce sens qui prévaut en particulier dans le probabilisme en théologie morale. C'est dans la deuxième moitié du 17 siècle, à la suite des travaux de Blaise Pascal, Pierre de Fermat et Christian Huygens sur le problème des partis que ce mot prend peu à peu son sens actuel avec les développements du traitement mathématique du sujet par Jakob Bernoulli . Ce n'est alors qu'au 19 siècle qu'apparaît ce qui peut être considéré comme la théorie moderne des probabilités en mathématiques.
L'apparition de la notion de "risque", préalable à l'étude des probabilités, n'est apparue qu'au 12 siècle pour l'évaluation de contrats commerciaux avec le Traité des contrats de Pierre de Jean Olivi, et s'est développée au 16 siècle avec la généralisation des contrats d'assurance maritime. A part quelques considérations élémentaires par Girolamo Cardano au début du 16 siècle et par Galilée au début du 17 siècle, le véritable début de la théorie des probabilités date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654.

Ce manuscrit est une introduction au calcul des probabilités, il est destiné aux étudiants de la deuxième année de la filière MI option mathématiques.
Ce polycopié ne peut être considéré comme un ouvrage de référence, il est écrit dans le but de servir comme aide mémoire pour un étudiant abordant pour la première fois le cours de probabilités.
Il est constitué de trois chapitres Le premier chapitre est un rappel des outils de base de l'analyse combinatoire, après un bref survol de la théorie des ensembles et les Opérations logiques, on y expose les principes fondamentaux de l'analyse combinatoire.
Dans le second chapitre on aborde la théorie moderne du calcul des probabilités en donnant la définition mathématique d'un espace de probabilités, nous avons essayé de faire appel aux notions de la théorie de la mesure, qui reste malgré tout essentielle pour une approche rigoureuse du calcul des probabilités. Nous avons introduit la notion de probabilité conditionnelle ainsi que la notion d'indépendance pour les événements qui reste une notion propre à la théorie de la probabilité.
Le troisième chapitre est consacré aux variables aléatoires, après la définition de cette notion nous étudions en détail les deux grandes familles de variables aléatoire à savoir les variables discrètes et les variables absolument continues, nous définissons ensuite la fonction de répartion ainsi que l'ésperance et la variance et nous définissons bien détaillé les principales lois de probabilité ainsi que pour le problème de Convergence de suites de variables aléatoires.
Après avoir enseigné le cours de probabilités aux étudiants de la deuxième année mathématique à plusieurs reprises, j'ai pu constater amèrement la difficulté d'aborder ce sujet dans sa généralité au vu des difficultés que rencontre de nombreux étudiants à manipuler les lois des probabilités déscrètes ou bien lois des probabilités continue, j'ai dû donc me restreindre aux vriables aléatoires et les caracteristiques chaques type de variable, en espérant des jours meilleurs.
A la fin de chaque chapitre nous proposons une série d'exercices à difficulté variable, afin d'aider l'étudiant studieux à mieux assimiler le contenu de ce cours.
Cet ouvrage ne prétend à aucune originalité, le contenu exposé est standard, il fait partie de la plupart des livres traitant de la théorie moderne des probabilités.

Chapitre 1

Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire comprend un ensemble des méthodes qui permettent de détermines le nature de tous les résultats possibles d'une expérience,et avant commencer sur les outils de base de l'analyse combinatoireun on va donner un bref survol de la théorie des ensembles et les Opérations logiques.

1.1 Opérations ensemblistes

Les ensembles seront principalement notés à l'aide de lettres majuscules A, B, C, D..etc., tandis que les objets qui les composent, ses éléments, seront désignés par des lettres minuscules i, j, k, l, x, y,...etc. Pour signifier l'appartenance d'un élément i à un ensemble A, on dit parfois que "i est dans A", on le note $i \in A$. Si au contraire un élément i n'appartient pas à A, on note $i \in A$.

1.1.1 Réunion d'ensembles

La réunion de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble constitué des éléments de A et des éléments de B. On a toujours $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.

Propriétés 1.1 *(Commutativité)*

$$A \cup B = B \cup A$$

Propriétés 1.2 *(Commutativité)*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C := A \cup B \cup C$$

1.1.2 Intersection d'ensembles

L'intersection de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble constitué des éléments étant à la fois dans A et dans B. On a toujours $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$. Lorsque A et B n'ont aucun élément en commun, on dit qu'ils sont disjoints et on note $A \cap B = \emptyset$.

Propriétés 1.3 *(Commutativité)*

$$A \cap B = B \cap A$$

Propriétés 1.4 *(Associativité)*

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C := A \cap B \cap C$$

Propriétés 1.5 *(Distributivité)*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

1.1.3 Complémentaire d'un ensemble

Soit Ω un ensemble et A une partie de Ω. Le complémentaire de A dans Ω, notée $\Omega\mathcal{A}$, ou $\overline{A}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur (ou encore A^c), est l'ensemble constitué des éléments de $\Omega\mathcal{A}$ qui ne sont pas éléments de A. On appelle aussi parfois "$\Omega\mathcal{A}$ privé de A" l'ensemble $\Omega\mathcal{A}\ A$.
Par ailleurs, on a toujours $\overline{A} \cup A = \emptyset$ et $\overline{A} \cap A = \emptyset$

Propriétés 1.6 *(Lois de Morgan)*

$$(\overline{A \cup B}) = (\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$(\overline{A \cap B}) = (\overline{A} \cap \overline{B})$$

1.1.4 Inclusion

Si tous les éléments d'un ensemble A sont aussi éléments d'un autre ensemble B, on dit que "**A est inclus dans B**" et on le note $A \subset B$. On dit aussi que "A est un sous-ensemble de B".
On a toujours

$$A \subset A \cup B; A \cap B \subset A; A \cap B \subset A \cup B; \emptyset \subset A$$

1.1.5 Opérations ensemblistes et Opérations logiques

On peut dès à présent noter le lien entre ces opérations et les opérations (ou connecteurs) logiques "OU", "ET" et "NON" : Un élément de $A \cup B$ est un élément qui appartient à A "OU" à B. Un élément de $A \cap B$ est un élément qui appartient à A "ET" à B. Un élément de $\overline{A}$ est un élément qui n'appartient PAS à A.
Attention 1 Le connecteur logique OU mentionné correspond à un "ou inclusif" : $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A, ou dans B mais qui peuvent être dans les 2.

1.1.6 Ensemble fini

Définition 1.1 *On appelle* ***ensemble fini*** *un ensemble ayant un nombre fini d'éléments distincts.*

Définition 1.2 *Le nombre d'éléments d'un ensemble fini* A *est appelé* ***cardinal*** *de* A*, noté* $card[A]$.

Exemple 1.1 $E = \{a; b; c\}$ *et* $card[E] = 3$.

Cardinal

Propriétés 1.7 *Soient* A *et* B *deux ensembles finis quelconques,*

$$card[A \cup B] = card[A] + card[B] - card[A \cap B]$$

Si A *et* B *sont disjoints, c'est-à-dire que* $A \cap B = \emptyset$ *alors,*

$$card[A \cup B] = card[A] + card[B]$$

Corollaire 1.1 *Soit* A *est un sous ensemble de* E.

$$card[\overline{A}] = card[E] - card[A]$$

Cardinal d'un produit cartésien

Définition 1.3 *Soient* E *et* F *deux ensembles, le* ***produit cartésien*** *noté* $E \times F$ *est l'ensemble de tous les couples* $(x\,;\,y)$ *où* x *est élément de* E *et* y *élément de* F.

Attention 1.1 $E \times F$ *est différent de* $F \times E$.

Théorème 1.1 *Si* E *et* F *sont finis, on a :*

$$card[E \times F] = card[E] \times card[F]$$

1.2 Dénombrements

Dans le cadre d'un ensemble fini E, la problématiques consiste en :
- la constitution des collections d'ensembles ou d'applications ayant une caractéristique commune (cas favorable),
- comptabiliser le nombre d'objets constituant cette collection. Le dénombrement ne s'applique qu'à des ensembles finis et fait intervenir deux critères fondamentaux pour la constitution et la distinction des objets a denombrer : la répétition et l'ordre.

Définition 1.4 *(**Répétition**) Lors de la constitution des collections, chaque élément de E peut etre utilisé plusieurs fois.*

Définition 1.5 *(**Ordre**) Pour distinguer deux collections, on peut tenir compte de l'ordre des éléments qui les composent.*

Remarque 1.1 *Si l'on autorise la répétition on doit nécessairement faire intervenir l'ordre.*

1.2.1 Nombre de partie d'un ensemble fini

Propriétés 1.8 *Soit En un ensemble contenant n éléments. Il y a* 2^n *parties disctincts de* E.

Démonstration : Il existe diverses démonstrations de cette propriétés. On peut par exemple utiliser un arbre et faire une correspondance entre une feuille et une partie. On peut également utiliser la formule du binôme de Nenwton...

1.2.2 La notion de p-listes

Définition 1.6 *Soit En un ensemble contenant n éléments. Une p-liste d'éléments de En, est une liste ordonnée de p éléments de En avec répétitions possible.*

Propriétés 1.9 *(**Expression du nombre de p-listes**) Le nombre de p-liste distinctes est égal à* n^p.

Exemple 1.2 *Considérons l'ensemble* $E = \{1, 2, 3, A, B\}$ *correspondant aux différentes touches d'un clavier de digicode dont le code est une succession de 3 caractères issus de* E. *Combien y-a-t-il de code différents ? Ce sont les 3-listes de E il y en a* 5^3 *soit 125.*

1.2.3 Les arangements

Considérons E_n un ensemble fini contenant n éléments differents et p un entier naturel inférieur ou égal à n.

Définition 1.7 *Un* ***arrangement*** *à p éléments de En est un échantillon ordonné sans remise de p éléments differents de E_n.*

Propriétés 1.10 ***(Expression du nombre d'arrangements)*** *Le nombre d'arrangements à p éléments de E_n noté A_p^n est égal à :*

$$A_p^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1)$$

Démonstration : Pour le premier élément, on a n choix possibles. Le premier étant fixé, pour le deuxième élément, on a (n-1) choix possibles le tirage étant sans remise. Le premier et le deuxième étant fixés pour le troisième élément, on a (n-2) choix possibles... et ainsi de suite jusqu'au $p$ième élément, pour lequel on a $[n-(p \mid -1)] = n..p+1$ choix possible. On a donc bien

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1)$$

arrangements à p éléments de E_n.

Définition 1.8 *On appelle* ***factorielle*** *n le produit des n premiers entier :*

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1$$

. avec la convention $0! = 1$.

Propriétés 1.11

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1) &= \frac{n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) \times (n-p) \times ... \times 1}{n \times (n-p) \times ... \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} \end{aligned}$$

Remarque 1.2 $n!$ *est une touche de la plupart des calculatrices.*

Exemple 1.3 *Un joueur se demande combien il peut écrire de grilles differentes de tiercé pour une course de 16 chevaux. Il y a 16 possibilités pour le premier, 15 pour le second et 14 pour le troisième. On n'accepte pas les répétitions et on tient compte de l'odre, il s'agit d'arrangements et on a donc* $A_3^{16} = 16 \times 15 \times 14 = 3360$ *possibilités.*

1.2.4 Les permutations

Définition 1.9 *(Les permutations) Une permutation de En est un échantillon ordonné sans remise des n éléments differents pris dans En. C'est donc le cas particulier d'un arrrangement de n éléments de E_n.*

Propriétés 1.12 *Le nombre de permutations de E_n est donc égal à : $P_n = n!$*

Exemple 1.4 *Si le joueur de tiercé a précedemment choisi les 3 chevaux qu'il va jouer mais ne sait pas dans quel ordre il va les placer, il a 3 ! choix possibles c'est à dire* $3 \times 2 \times 1 = 6$ *possibilités de tiercé.*

1.2.5 Les conbinaisons

Soit E_n un ensemble fini contenant n éléments differents et p un entier naturel inférieur ou égal à n.

Définition 1.10 ***Une combinaison*** *à p éléments de En est un échantillon non ordonné sans remise de p éléments différents de En. C'est un sous ensemble p éléments de En. Dans une combinaison de p éléments, les p éléments sont distincts et non ordonnés.*

Propriétés 1.13 *(**Expression du nombre de combinaisons**) Le nombre de combinaisons à p éléments de En noté C_p^n est égal à :*

$$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Démonstration : On considère les p premiers éléments de En. Avec ces p éléments on peut former p ! arrangements et ces p ! arrangements donnent une seule combinaison or on peut former A_p^n arrangements avec les n éléments de En. on a donc A_p^n p ! combinaisons differentes de E_n.

Remarque 1.3
- *Si p = 0 alors on a une seule combinaison à zéro élément : la partie vide.*
- *Si $p = n$ alors on a une seule combinaison à n éléments de E_n : la partie E_n.*
- *Si p = 1 alors on a n combinaisons à un élément de E_n, les n sous-ensembles à un élément de E_n.*

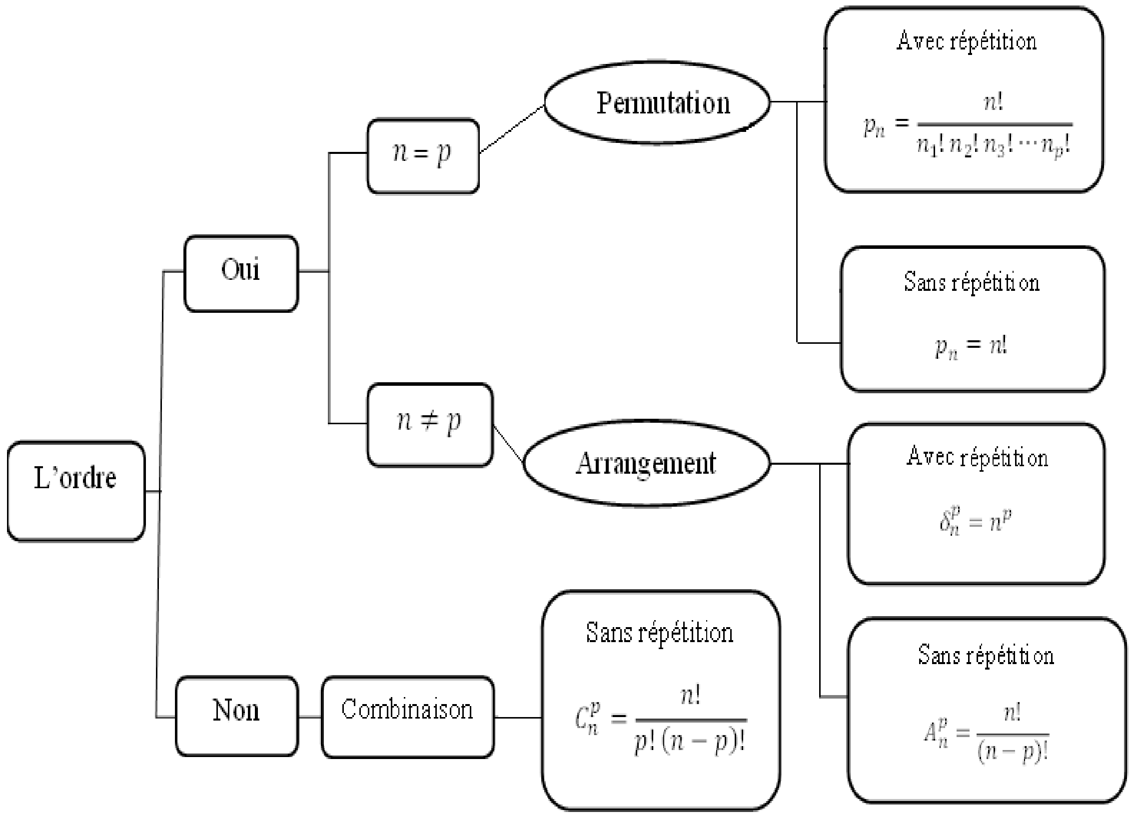


FIGURE 1.1 – Résumé les opérations sur l'analyse combinatoire

Exemple 1.5 *Nous avons vu ci-dessus avec l'exemple du joueur de tiercé que quand on a choisi sans ordre une partie de 3 éléments parmi 16, il reste $3! = 6$ maniéres d'ordonner cette partie. Par exemple si on choisit la partie (2,7,9) on peut lui associer les 6 permutations : (2,7,9), (2,9,7), (7,2,9), (7,9,2), (9,2,7) et (9,7,2). En d'autres termes il est possible de regrouper les arrangements par paquets de 6 correspondant à la même partie. Le nombre d'arrangements (ordonnés) de 3 éléments parmi 16 est donc égal à 6 fois le nombre de combinaisons (non ordonnées) de 3 éléments parmi 16. On a donc une application du "Principe des bergers" :*

$$C_{16}^3 = \frac{A_{16}^3}{3!}$$

Propriétés 1.14

$$\begin{aligned} C_p^n &= C_{n-p}^n \\ &= C_{p-1}^{n-1} + C_p^{n-1} \end{aligned}$$

Démonstration :
1. Choisir les p éléments que l'on veut dans un ensemble de n éléments revient exactement à choisir les $n-p$ éléments que l'on ne veut pas, d'où le résultat. Mathématiquement, on a :

$$\begin{aligned} C_p^n &= \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= C_p^n \end{aligned}$$

2. Soit E une ensemble de n élément. Soit A l'un de ces éléments. Pour choisir p éléments de E, je peux soit prendre A et en choisir p-1 autres parmi les n-1 restants (j'ai alors C_{p-1}^{n-1} possibilités), soit laisser A et en prendre p autres parmi les n-1 restants (j'ai alors C_p^{n-1} possibilités). D'où le résultat. Mathématiquement, on a :

$$\begin{aligned} C_{p-1}^{n-1} + C_p^{n-1} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p)!(n-p-1)!} \\ &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(p+n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= C_p^n \end{aligned}$$

Remarque 1.4 *Quand $n > p/2$ il est plus rapide de calculer C_{n-p}^n que C_p^n . Par exemple :*

$$\begin{aligned} C_{32}^2 &= C_{32}^{30} \\ C_{32}^2 &= \frac{32 \times 31}{2 \times 1} \\ C_{32}^{30} &= \frac{32 \times 31 \times ... \times 4 \times 3}{30 \times 29 \times ... \times 2 \times 1} \end{aligned}$$

1.3 Triangle de pascal

Les formules de calcul ci-dessus nous donne une méthode de calcul des combinatoire par récurrence appelé triangle de pascal :

1.4 Formule du binôme de Newton

Théorème 1.2 *Soient a et b deux réels :*

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
n=0 & 1 & & & & & & & & & \\
n=1 & 1 & \xrightarrow{+} & 1 & & & & & & & \\
 & & & \downarrow = & & & & & & & \\
n=2 & 1 & & 2 & \xrightarrow{+} & 1 & & & & & \\
 & & & & & \downarrow = & & & & & \\
n=3 & 1 & \xrightarrow{+} & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & & \downarrow = & & & & & & & \\
n=4 & 1 & & 4 & \xrightarrow{+} & 6 & & 4 & \xrightarrow{+} & 1 & \\
 & & & & & \downarrow = & & & & \downarrow = & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

FIGURE 1.2 – Triangle de pascal

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^p a^k b^{n-k}$$

Démonstration : Par récurrence sur n. Pour n $=$ 0 la propriété est immédiate puisque 1 $=$ 1. Supposons la propriété vraie pour n et regardons si elle est vraie pour n $+$ 1.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n + (a+b) \\
&= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\
&= a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} C_n^p a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^p a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}
$$

On considére maintenant $k^{'} = k+1$, on a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k'=1}^{n+1} C_n^{k'-1} a^{k'} b^{n-k'+1} + \sum_{k=0}^{n} C_n^p a^k b^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k'=1}^{n} C_n^{k'-1} a^{k'} b^{n-k'+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^p a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour n+1. Par le principe de raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

Remarque 1.5 *On peut également démontrer cette propriété de manière "ensembliste", en developpant et en s'intéressant au nombre de terme en $a^k b^{n-k}$...*

1.5 Exercices

Exercice 1.1 *1- Combien de plaques d'immatriculation de véhicule peut-on former si chaque plaque contient deux lettre différents suivies de trois chiffres différents ?*
2- Résoudre le problème en supposant que le premier chiffre ne peut être égale à 0.

Exercice 1.2 *1- Déterminer le nombre de mots de quatre lettres que l'on peut former avec les lettres du mots :* ***GRAND***
2- Combien de ces mots contient seulement des consone ?
3- Combien de ces mots commencent et se terminent par une consonne ?
4- Combien de ces mots commencent et se terminent par une voyelle ?

Exercice 1.3 *- Une classe comporte 9 garçons et 3 filles pour choisi 4 élèves.*
1- Combien de manière le professeur peut-il faire le choix ?
2- Combien de ces choix comportement au moins un fille ?
3- Combien de ces choix comportement exactement une fille ?

Exercice 1.4 *Calculer le nombre de permutations que l'on peut former avec l'ensemble des lettre des mots suivants :* ***Mississippi****,* ***Factoriel****,* ***Proposition****.*

Exercice 1.5 *Montrer que :*
1- $\sum_{i=1}^{n} C_i^n = 2^n$
2- $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_i^n = 0$

Exercice 1.6 *Devllopper et simplifier :* $(2x + y^2)^3$, $(x^2 + 3y)^4$

Exercice 1.7 *1- On jette en l'air une pièce de monnaie et un dé. Déterminer l'ensemble fondamental ?.*
2- Determininer l'événement suivants :
A= face et un nombre pair.
B= un nombre premier.
C= Pile et un nombre impair.
3- Exprimer l'événement : ***(a)*** *A ou B est réaliser.* ***(b)*** *A et C est réaliser.* ***(c)*** *B seulement est réaliser.*
4- Lesquels des événements A, B et C sont disjoints.

Exercice 1.8 *Trois chevaux A, B et C participent à une cours. A a deux fois plus de chance que B de gagner et B a deux fois plus de chances que C de gagner.*
1- Quelles sont les probabilités respectives P(A), P(B) et P(C) de gagner des trois chevaux ?
2- Quelles est la probabilité P(B,C) pour que B ou C soit le vainqueur ?

Exercice 1.9 *On prend au hasard trois ampoules électriques d'un lot de 15ampooules dont 5 sont défectueuse.*
Calculer la probabilité P pour que :
1) *aucun ampoule ne soit défectueuse.*
2) *exactement une ampoule soit défectueuse.*
3) *au mois une ampoule soit défectueuse.*

Chapitre 2

Introduction au calcul des probabilités

2.1 Espace probabilisable

2.1.1 Espace échantillon

Définition 2.1 *On appelle expérience aléatoire ou épreuve, toute expérience dont le résultat est régi par le hasard l'orsqu'on répète l'expérience dans les mêmes conditions.*

Exemple 2.1 *Donnons quelques exemples simples d'expériences aléatoires :*

1. *le jet d'une pièce de monnaie et l'observation de la face supérieure.*
2. *Le jet d'un dé à six faces et l'observation de la face supérieure.*
3. *L'extraction d'une carte d'un jeu de 32 cartes.*
4. *La mesure de la durée de vie d'une batterie de téléphone portable.*
5. *La détermination du nombre de personnes arrivant à un guichet dans une période donnée.*

Définition 2.2 *On appelle l'ensemble des tous les résultats possibles d'une experience aleatoire espace échantillon ou espace des épreuves. On le note* Ω.

Remarque 2.1 *Les espaces échantillons correspondent aux experiencs aléatoires citees dans l'exemple precedent sont respectivement :* Ω_1 *= pile, face,* Ω_2 *= 1, 2, 3, 4, 5, 6*
Ω_3 *= l'ensembles des 32 carte,* $\Omega_4 = [0, +\infty[$, Ω_5 *= N.*

2.1.2 Algèbre-Tribu

Définition 2.3 *Soit Ω un espace échantillon, une algèbre $\mathcal{A}$ sur Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :*

i $\Omega \in \mathcal{A}$

ii $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

iii $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Définition 2.4 *Soit Ω un espace échantillon, une tribu ou une σ-algebre $\mathcal{F}$ sur Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ verifiant :*

i $\Omega \in \mathcal{A}$

ii $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

iii *Si $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}$alors :*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$$

Exemple 2.2 *Soient Ω un espace échantillon, $A \in \mathcal{P}$, alors :*

- *$\mathcal{A}_\prime = \{\emptyset, \Omega\}$ est une algèbre sur Ω appelee l'algèbre triviale sur Ω.*
- *$\mathcal{P}$ est une algèbre sur Ω , elle est appelée l'algèbre grossiere sur Ω .*
- *Soit $A \subset \Omega$, posons : $\sigma(A)\{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$. Il est clair que $\sigma(A)$ est une algèbre sur Ω , elle est appelee l'algebre engendree pas A.*
- *Posons $\Omega = \{a, b, c\}$ et $A = \{\emptyset, \Omega, a, b, a, c, c\}$ alors A n'est pas une algèbre sur Ω puisque $\{a, c\} = \{b\} \ni \mathcal{A}$*

Remarque 2.2 *Il n'est pas difficile de voir que :*

- *Une tribu est forcément une algèbre mais la réciproque est fausse en général.*
- *Une algèbre (et à fortiori une tribu) contient toujours l'ensemble vide.*
- *Une algèbre est stable par intersection finie.*
- *Une tribu est stable par intersection infinie dénombrable.*
- *La réunion de deux algèbres (resp. de deux tribus) nŠest pas une algèbre (resp. une tribu) en général.*

Cependant on a le résultat suivant :

Proposition 2.1 *L'intersection de deux algebres (resp. de deux tribus) est une algebre (resp. une tribu).*

Définition 2.5 *Soient Ω un espace echantillon, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appele espace probabilisable ou espace mesurable.*

2.2 Espace de probabilité

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F})$ designe un espace probabilisable.

Définition 2.6 *Soient $A, B, A_1, A_2, ...A_n$ des elements de $\mathcal{F}$.*

a *On dit que $AetB$ sont incompatibles ou disjoints si $A \cap B = \emptyset$*

b *On dit que $A_1, A_2, ...A_n$ sont deux a deux incompatibles si pour tout $1 \leq i \neq j \leq n : A_i \cap B_i = \emptyset$*

c *On dit que $A_1, A_2, ...A_n$ forment une partition de Ω, s'ils sont deux a deux incompatibles et si :*

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$$

Nous pouvons à présent donner la définition d'une probabilité :

Définition 2.7 *On appelle probabilite, toute application $\mathbb{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ verifiant les deux proprietes suivantes :*

i $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

ii *σ-additivite : Pour toute famille $A_k, k \geq 1$ d'éléments de $\mathcal{F}$ deux a deux incompatibles, on a :*

$$\mathbb{P}(\cup_{k\geq1} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Remarque 2.3 *Cette definition merite quelques explications :*

1. *La première condition est assez naturelle puisque par definition, Ω est l'ensemble de tous les resultats possibles.*
2. *La condition de σ-additivite est aussi naturelle, en effet si on considere le jet d'un de equilibre, la probabilite d'avoir un 2 ou un 4 est 2/6 = 1/6+1/6 donc la somme des probabilites d'avoir un 2 et un 4.*
3. *De cette definition, on peut comprendre l'utilité de la notion de tribu, introduite dans la definition 2.4, ainsi la tribu peut etre consideree comme le domaine de definition d'une probabilite $\mathbb{P}$. En effet dans cette dernière définition on peut parler de $\mathbb{P}(A_n)$ puisque $A_n \in \mathcal{F}$, mais on ne pouvait pas écrire $\mathbb{P}(\cup_{n\geq1} A_n)$ si $\mathcal{F}$ n'était pas une tribu. (à méditer)*
4. *On peut se demander pourquoi ne pas definir une probabilite $\mathbb{P}$. sur $\surd(\Omega)$. tout simplement ? La reponse est que lorsque Ω est un ensemble fini, la tribu $\mathcal{F}$ sera souvent $\surd(\Omega)$, mais lorsque Ω est un ensemble infini, ceci n'est pas possible en general, ces considerations sont purement theoriques et sortent du cadre de ce polycopie.*

Remarque 2.4 *Il faut bien noter que pour la condition de σ-additivite exigée dans la definition précédente, on demande que les ensembles $\{A_k, k \geq 1\}$, soient deux à deux incompatibles, en effet si cette condition n'est pas verifiée, l'équation (2.1), peut ne pas être satisfaite, pour le voir il suffit de considérer l'éxperience aléatoire qui consiste a jeter un dé équilibre et à observer la face superieure. Soient :*

A : "avoir un chiffre pair"
B : "avoir un chiffre supérieur ou égale a 3".

On a $A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$, d'où $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Ainsi $\mathbb{P}(A) = 1/2, \mathbb{P}(B) = 2/3$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 5/6$, par consequent :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6} \neq \frac{7}{6} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Définition 2.8 *Si $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace probabilisable, $\mathbb{P}$ une probabilite definie sur $(\Omega, \mathcal{F})$, alors le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appele espace de probabilite.*

Proposition 2.2 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilite, $A, B \in \mathcal{F}$, alors :*

1. $\forall E \in \mathcal{F}, 0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1.$
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$
3. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A).$
4. *Croissance : $\mathbb{P}$ est une application croissante :*

$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$

Exemple 2.3 *Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, $A, B \in \mathcal{F}$ Peut-on définir une probabilite vérifiant :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4} et \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}?$$

Solution :
Il suffit de remarquer que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A)$ ce qui est impossible car $A \cap B \subset A$ et ceci implique d'aprés le quatrième point de la proposition 3.2 que $\mathbb{P}(A \cap B)$ doit être inférieur ou égale a $\mathbb{P}(A$.

Exemple 2.4 *Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, $A, B \in \mathcal{F}$. Peut-on définir une probabilité $\mathbb{P}$ verifiant :*
$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{7}{8}$ *et* $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Solution : D'apres la proposition 3.2, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{9}{8} > 1$, ce qui est impossible d'apres la definition d'une probabilité.

Proposition 2.3 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilite, $A, B \in \mathcal{F}$, alors :*

- *L'ensemble vide est appelé l'évènement impossible.*
- *Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est un évènement presque impossible.*
- *Ω est appele l'évènement certain.*
- *Si $\mathbb{P}(B) = 1$, on dit que B est un évènement presque certain.*

Dans la définition de la σ-additivité (definition 2.7), on exige que les évènements $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ soient deux a deux incompatibles, pour pouvoir calculer la probabilité de la réunion de plusieurs évènements. Dans le cas ou cette condition n'est pas vérifiée, on a seulement une inégalité, dite inégalité de Boole :

Proposition 2.4 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ une suite d'élements de $\mathcal{F}$, alors :*

$$\mathbb{P}(\cup_{k\geq 1} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Une probabilité possède aussi une propriété qui ressemble à la continuité d'une fonction et qui nous sera utile pour la suite :

Proposition 2.5 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité Si $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$(i.e $A_n \subset A_{n+1}$,pour tout n . 1), alors*

$$\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} A_n) = lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Si $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ est une suite décroissante d'élements de $\mathcal{F}$(i.e $A_n \supset A_{n+1}$,pour tout $n \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} A_n) = lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2.2.1 Le cas équiprobable

Supposons dans ce paragraphe que Ω est un ensemble fini avec $card(\Omega) = n$, on peut l'écrire : $\Omega = w_1, w_2, ..., w_n$. Supposons aussi que tous les évènements $\{w_k\}$. sont équiprobables ou uniformes i. e.

$$\mathbb{P}(\{w_1\}) = \mathbb{P}(\{w_1\}), \mathbb{P}(\{w_2\}), ..., \mathbb{P}(\{w_n\})$$

En utilsant les propriétés de la probabilité $\mathbb{P}$ (définition 2.7), on a par la propiriété de σ-additivite :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} \{w_k\}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{w_k\}) = n\mathbb{P}(\{w_1\})$$

Par suite

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \mathbb{P}(\{w_k\}) = \frac{1}{n}$$

Soient à présent $1 \leq k \leq n, A \subset \Omega$, avec $card(A) = k$. Dans ce cas on peut écrire $A = \{w_1^{'}, w_2^{'}, ..., w_k^{'}\}.$, où chaque $w_k^{'}$ est choisit dans l'ensemble Ω. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{j=1}^{k}\{w_k^{'}\}) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\{w_k^{'}\}) = k\mathbb{P}(\{w_1^{'}\}) = \frac{k}{n}$$

On a alors prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Dans le cas équiprobable, la probabilité d'un evenement A est donnée par*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}$$

Afin d'illustrer ce résultat, donnons trois exemples :

Exemple 2.5 *On jette deux dés équilibrés, et on observe les faces superieures des deux dés. Notons par A l'évènement :*

A : "la somme des deux chiffres est egale a 5".

Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Solution :
Soit Ω l'espace echantillon associe a cette experience aléatoire, ainsi

$$\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

.

Par suite $card(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. De plus les deux des sont équilibrés, donc chaque élément (x, y) de Ω a la même probabilité d'apparaître. On est par conséquent dans un cas équiprobable. D'autre part $A = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

Le théorème 2.6 donne :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{4}{\Omega}$$

Exemple 2.6 *On forme un nombre de 4 chiffres choisis au hasard dans l'ensemble* $\{1, 2, ..., 9\}$. *Quelle est la probabilités que le nombre soit pair ?*

Solution : Notons le nombre choisis par abcd et soit Ω l'espace échantillon associe a cette experience aleatoire, ainsi $\Omega = \{abcd/a, b, c, d \in \{1, 2, ...9\}\}$. D'ou $card(\Omega) = 9\times9\times9\times9 = \frac{9}{4}$. A présent, introduisons l'évènement B : "le nombre choisis est pair". Puisque le nombre est choisi au hasard, on est dans un cas équiprobable. D'autre part le nombre *abcd* est pair si et seulement si $d \in \{2, 4, 6, 8\}$, donc $card(B) = 9\times9\times9\times4$. On a par le théorème

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{9^3 \times 4}{9^4} = \frac{4}{9}$$

Exemple 2.7 *Une urne contient 10 boules : 3 noires, 4 blanches et 3 rouges. On tire de cette urne 3 boules. calculer la probabilité des évènements suivants :*

- *A : "Avoir exactemeent 3 boules blanches".*
- *B : "Avoir une boule de chaque couleur".*
- *C : "Avoir au moins une boule rouge".*

Solution :
Dans cet exemple on n'attache pas d'importance a l'ordre d'apparition des boules, on forme donc un sous ensemble compose de trois boules choisis dans un ensemnble de 10 boules. Par consequent $card(\Omega) = C_3^{10}$.

- Pour le premier evenement, on veut 3 boules blanches, pour realiser cet évenement, on doit choisir nos 3 boules parmi les 4 boules blanches, on a donc $card(A) = C_3^4$. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^4}{C_3^{10}}$$

- Pour lŠévènement B, on veut avoir une boule de chaque couleur, donc on a 3 choix pour la noire, 4 pour la blanches et 3 pour la rouges, ainsi $card(B) = 3 \times 4 \times 3 = 36$. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{36}{C_3^{10}}$$

- Enfin pour le dernier évènement, même si on peut calculer $\mathbb{P}(C)$ directement, il est préférable de calculer d'abord $\mathbb{P}(\overline{C})$ qui est plus simple. En effet, on a $\overline{C}$: "Ne pas avoir de boule rouge", mais il y a 7 boules qui ne sont pas de couleur rouge, d'où $card(\overline{C}) = C_3^7$. Par conséquent

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - \frac{\overline{C}}{card(\Omega)} = 1 - \frac{C_3^7}{C_3^{10}}$$

2.3 Probabilité conditionnelle

Soient$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$un espace de probabilité, $A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition 2.9 *Pour $A \in \mathcal{F}$, on désigne par $\mathbb{P}(A/B)$ la probabilité de A sachant B, elle est définie par :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Remarque 2.5 *Soient A, B deux évènements de Ω, $\mathbb{P}(A/B)$ se lit la probabilité de A sachant B ou la probabilité conditionnelle de A par rapport à B.*

La probabilité condionnelle par rapport a un évènement permet d'introduire une nouvelle probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, en effet :

Remarque 2.6 *L'application $\mathbb{P}(./B)$ definie de $\mathcal{F}$ vers $[0, 1]$ par*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

est une probabilite sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Remarque 2.7 *Soient $C, D \in \mathcal{F}$. Cette proposition signifie en particulier que :*

a $\mathbb{P}(\Omega/B) = 1$.

b $\mathbb{P}(C \cup D/B) = \mathbb{P}(C/B) + \mathbb{P}(D/B) - \mathbb{P}(C \cap D/B)$.

c *Si C et D sont incompatibles, alors $\mathbb{P}(C \cup D/B) = \mathbb{P}(C/B) + \mathbb{P}(D/B)$.*

d $\mathbb{P}(\overline{C}/B) = 1 - \mathbb{P}(C/B)$.

Exemple 2.8 *On jette successivement deux dés équilibres. calculer la probabilité des événements suivants :*

1. *A : "La somme des chiffres sur les deux des est un nombre pair".*
2. *B : "La somme des chiffres sur les deux dés est un nombre pair sachant que le premier dé a donne le chiffre 5".*

Solution : Dans cet exemple $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. D'autre part, la somme de deux chiffres est paire si et seulement si les deux chiffres sont pairs ou impairs, d'où

$$A = \{(x, y)/x, y \in \{1, 3, 5\}\} \cup \{(x, y)/x, y \in \{2, 4, 6\}\}$$

Par consequent, $card(A) = 9 + 9 = 18$ et on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Pour le second évènement introduisons l'évènement C : "le premier de a donne le chiffre 5" On a ainsi $A \cap C = \{(5, y)/y \in \{1, 3, 5\}\}$ et on a $card(A \cap C) = 3$. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A/C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{3/36}{3/6} = \frac{1}{6}$$

.

Remarque 2.8 *Dans cet exemple, on a calculé dans les deux questions la probabilité que la somme des deux chiffres obtenus soit paire, mais à la difference de la première question où on n'avait aucune information, dans la deuxièmme question on savait que le premier dé a ramené le chiffre 5, ce qui explique la différence dans les résultats obtenus, et le fait que la probabilité calculée dans le second cas est plus petite que celle calculée au premier cas*

Exemple 2.9 *On jette deux pièces de monnaie équilibrés. Calculer :*

1. *La probabilité que les deux pièces ramènent pile, sachant que la première a ramené pile.*
2. *La probabilité que les deux pièces ramènent face, sachant qu'au moins l'une dŠentre elle a ramené face.*

Solution : Pour $i \in \{1, 2\}$, posons : A_i : "La ieme piece a ramene pile"

1. On cherche $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2/A_1)$. On a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2/A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_1) = \frac{1/2 \times 1/2}{1/2} = \frac{1}{2}$$

2. On cherche $\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2/\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2/\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2))}{\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2)}{1 - \mathbb{P}(\overline{A_1 \cap A_2})} \\
&= \frac{1/2 \times 1/2}{1 - (1/2 \times 1/2)} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Remarque 2.9 *Soient* $A, C \in \mathcal{F}$ *avec* $\mathbb{P}(A) > 0et\mathbb{P}(A \cap B) > 0$ *D'apres la définition de la probabilité conditionnelle, on a*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

d'où

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B)$$

De même

$$\mathbb{P}(C/A \cap B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cap B)}$$

ainsi

$$\mathbb{P}(C \cap A \cap B) = \mathbb{P}(C/A \cap B)\mathbb{P}(A \cap B)$$

En combinant cette dernière équation avec (2.11), on obtient

$$\mathbb{P}(C \cap A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(C/A \cap B)$$

En faisant un raisonnement par récurrence, on peut généraliser cette dernière formule à n évènements.

Remarque 2.10 *Cette proposition est souvent utilisée lorsqu'on veut calculer la probabilité de l'intersection de plusieurs évènements obtenus en répétant une expérience aléatoire plusieurs fois, et lorsque l'espace échantillon change à chaque répétition. Nous proposons un exemple simple pour illustrer cela :*

Exemple 2.10 *Une urne contient une boule blanche et une boule noire, on tire des boules de cette urne jusqu'à ce que la noire appraisse. A chaque fois qu'une boule blanche est tirée, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche. Calculer la probabilité que la boule noire n'apparaisse pas au cours des cinq premiers tirages.*

Solution :
Pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, posons : B_i : "la boule tiree au ième tirage est blanche"
B : " la boule noire n'apparaisse pas au cours des cinq premiers tirages." Il est facile de voir que :

$$B = \cap_{i=1}^{5} B_i$$

En appliquant la proposition précédente, on a n'apparaisse pas au cours des cinq premiers tirages.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{5} B_i) \\
&= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_1/B_2)...\mathbb{P}(B_5/B_1 \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

2.4 Théorème de Bayes

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de $\Omega, A \in \mathcal{F}$ et supposons que $\mathbb{P}(A) > 0$ et que $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ Soit $1 \leq k \leq n$, on a par les equations (2.11) :

$$\mathbb{P}(A \cap A_k) = \mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k/A)\mathbb{P}(A)$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(A_k/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(A)} =$$

En faisant appel à la formule des probabilités totales dans cette dernière égalité, on obtient :

Théorème 2.2 *Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un systeme complet de $\Omega, A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Alors*

$$\mathbb{P}(A_k/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}$$

Remarque 2.11 *La formule de Bayes est appelée aussi la formule des causes, en effet la quantité $\mathbb{P}(A_k/A)$ donne la probabilité que l'évènement A s'est réalisé à travers A_k ou " à cause" de A_k.*

Exemple 2.11 *On effectue un test dans un grand élevage de bovins pour dépister une maladie. Ce test a permis de déceler 1.8*

1. *Quelle est la probabilité qu'un animal choisis au hasard dans cet élevage soit atteint de cette maladie.*
2. *L'animal choisi est atteint de cette maladie, quelle est la probabilité qu'il soit un mâle.*

Solution :
Introduisons les évènements suivants :
- A : "L'animal choisi est atteint de cette maladie".

- M : "L'animal choisi est un mâle".

Pour la première question, on cherche $\mathbb{P}(A)$. On a par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A/M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A/M)\mathbb{P}(M)\\ &= (0.018)(0.35) + (0.012)(0.65)\\ &= 0.0141.\end{aligned}$$

Pour la deuxièmme question on cherche $\mathbb{P}(M/A)$. On a par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(M/A) = \frac{\mathbb{P}(A/M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{(0.018)(0.35)}{0.0141} = 0.4468.$$

2.5 Indépendance des événements

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. un espace de probabilite, $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition 2.10 *On dit que les évènements A et B sont indépendants si :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$$

Remarque 2.12 *Soient A et B deux evenements de Ω : - Intuitivement, A et B sont independants si la realisation de B n'influe pas sur la relisation de A et vice versa.*
- Si A et B sont independants et si $\mathbb{P}(A) > 0$, alors il n'est pas difficile de voir qu'on a aussi :

$$\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$$

Une conséquence importante de la définition est :

Théorème 2.3 *Deux évènements Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si :*

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque 2.13 *On peut prendre l'équation (2.15) comme définition pour l'indépendance de deux évènements, dans ce cas on est pas obligé de supposer que la probabilité de l'un des deux évènements est strictement positive.*

Exemple 2.12 *On jette une pièce de monnaie deux fois de suites et on considère les évènements :*

- *A : "On obtient pile au premier jet"*
- *B : "On obtient le même résultat dans les deux jets"*

- *C : "On obtient pile dans les deux jets"*

Pour cette expérience on a $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{pile, face\}\}$, ainsi $card(\Omega) = 4$. D'autre part :

$$A = \{(pile, pile), (pile, face)\}, B = \{(pile, pile), (face, face)\},$$

$$C = \{(pile, pile)\}, A \cap B = \{(pile, pile)\}, A \cap C = \{(pile, pile)\},$$

d'où

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$$

. Par suite

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

. Ainsi A et B sont independants. Mais

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

ce qui montre que A et C ne sont pas independants.

Proposition 2.6 *Soient A, B deux evenements de Ω, les proprietes suivantes sont équivalentes :*

- *Les evenements A et B sont independants.*
- *Les evenements $\overline{A}$ et B sont independants.*
- *Les evenements A et $\overline{B}$ sont independants.*
- *Les evenements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont independants.*

En utilisant le theoreme 2.5, on peut généraliser la notion d'independance à plusieurs evenements :

Définition 2.11 *Soient $n \geq 2, A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements d'un espace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ sont independants si :*

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{p} A_{k_i}) = \prod_{k=1}^{P} \mathbb{P}(A_{k_i})$$

pour tout $k_1, k_2, ..., k_p \in 1, 2, ..., n$.

Remarque 2.14 *D'après cette définition, pour montrer que n évènemente sont indépendants il faut vérifier que lŠéquation (2.16) est valide pour toutes les intersections possibles des ces évènements, ainsi trois évènements A, B et C sont indépendants si*

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

et

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Exemple 2.13 *Considerons l'experience aleatoire qui consiste a jeter une piece de monnaie deux fois de suite et d'observer les resultats obtenus. Soient A, B et C les evenements :*

- *A : " Le resultat du premier jet est pile "*
- *B : " Le resultat du deuxieme jet est pile "*
- *C : " On obtient le meme resultat dans les deux jets "*

Ici $\Omega=\{(x,y), avec x, y\in pile, face\}$, donc $card(\Omega)=4$. D'autre part $\mathbb{P}(C)=$ La probabilite d'avoir deux fois pile ou deux fois face $=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$
d'ou

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2}$$

d' un autre cote
$\mathbb{P}(A\cap B)=$ La probabilite d'avoir pile dans les deux jets
$\mathbb{P}(A\cap C)=$ La probabilite d'avoir pile dans les deux jets
$\mathbb{P}(B\cap C)=$ La probabilite d'avoir pile dans les deux jets.

Par suite

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

et

$$\mathbb{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

.

Ainsi

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Par conséquent, les évènements A, B et C ne sont pas indépendants.

2.6 Exercices

Exercice 2.1 *Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules blanches. On tire trois boules de l'urne l'une après l'autre.*
Calculer la probabilité p pour que les deux première boules soient rouges et la troisième soit blanche.

Exercice 2.2 *Les élèves d'une classe sont choisis au hasard l'un après l'autre pour subir un examen.*
Calculer la probabilité p pour que l'on ait alternativement un garçons et une fille sachant que :
(1) La classe est composée de 4 garçons et 3 filles.
(2) La classe est composée de 3 garçons et 3 filles.

Exercice 2.3 *Dans un lycée ,0.25 des élèves échouent en mathématiques ,0.15 échouent en chimie ,et 0.1 échouent à la fois en mathématique et en chimie. On choisit un élève au hasard.*
(1) Si l'élève a échoué en chimie, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en mathématiques ?
(2) Si l'élève a échoué en mathématiques, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en chimie ?
(3) Quelle est la probabilité pour qu'il ait échoué en mathématiques ou en chimie ?

Exercice 2.4 *Trois machines A, B et C produisent respectivement 0.6, 0.3 et 0.1 du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages de résultats défectueux de ces machines sont respectivement 0.02, 0.03 et 0.04. On choisit une pièce au hasard et on s'aperçoit qu'elle est défectueuse.*
Calculer la probabilité pour que cette pièce ait été produite par la machine C.

Exercice 2.5 *Dans un collège, 0.04 des garçons et 0.01 des filles mesurent plus de 1.60m. On sait que 0.6 des élèves sont des filles. Si l'on prend un élève au hasard et si celui-ci mesure plus de 1.60m, quelle est la probabilité pour que cet élève soit une fille ?*

Exercice 2.6 *On considère deux urnes telles que : L'urne A contient 3boules rouges et 2 boules noires .L'urne B contient 2 boules rouges et 5 boules noires. On choisit l'une des urnes au hasard, on tire une boule et on la met dans l'autre urne, on tire alors une boule de la seconde urne. Calculer la probabilité p pour que les deux boules ainsi tirées soient de la même couleur.*

Exercice 2.7 *Une boite A contient 8 pièces détachées dont 3 sont défectueuses, et une boite B contient 5 pièces détachées dont 2 sont défectueuses. On tire au hasard une pièce détachée dans chaque boite.*

(1) Quelle est la probabilité p pour que les deux pièces détachées ne soient pas défectueuses ?
(2) Quelle est la probabilité p pour que l'une des pièces soient défectueuses et l'autre ne le soit pas ?
(3) Si l'une des pièces est défectueuses et l'autre ne l'est pas, quelle est la probabilité p pour que la pièce détachée provienne de la boite A ?

Chapitre 3

Variables aléatoires

3.1 Définition générale d'une variable aléatoire

Définition 3.1 *On appelle variable aléatoire le résultat d'une épreuve aléatoire lorsque l'issue de celle-ci peut être représentée par un nombre.*

Une variable aléatoire est généralement désignée par une lettre majuscule X, Y, etc. et peut également être définie en tant qu'application depuis l'univers ans $\mathbb{R}$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$w \mapsto X(w)$$

en considérant $w \in \Omega$ comme une réalisation particuliére de l'épreuve en question. L'ensemble des valeurs numériques prises par X est pour cette raison noté $X(\Omega)$, puisqu'il s'agit de l'image de Ω par X.

3.2 Variable aléatoire discrète

Définition 3.2 *On appelle variable aléatoire discrète une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs ponctuelles ("isolées").*

Exemple 3.1 *Résultat d'un jet de dé. Le résultat X est une variable aléatoire*

$$X : \Omega \ni w \mapsto X(\Omega)$$

à valeur dans $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - Lancer de 2 pièces de monnaies identiques dont l'issue est P (pour pile) et F (pour face).
L'univers

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$$

n'est pas composé de grandeur numériques mais on peut par exemple s'intéresser au nombre de fois où face(F) est apparu, définissant ainsi une variable aléatoire X :
$X : \Omega \to \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{R}$ *définie par le tableau*

Ω	PP	PF	FP	FF
X	0	1	1	2

TABLE 3.1 – Distribution d'une variable alétoire(X= nombre de "Face")

Cette application ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, la variable aléatoire X est discrète avec $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Les événements $\{X = x_i\}$ (x_i étant une valeur possible de X), engendrés par les diférentes valeurs prises par une variable aléatoire constituent les évènements élémentaires de X. Les événements élémentaires de l'exemple précédent seront ainsi notés $\{X = 0\}$ ("Aucun face n'a été tiré"), $\{X = 1\}$ ("Un face a été tiré") et $\{X = 2\}$ ("Deux faces ont été tirés"). On définit donc naturellement des variables aléatoires en associant un nombre à chaque évènement élémentaire. Comme on le verra, l'étude systématique des variables aléatoires fournit un cadre théorique d'étude des phénomènes aléatoires.

3.3 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 3.3 *La loi d'une variable aléatoire discrète X est une probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur ses événements élémentaires par l'application*

$$\mathbb{P}_X : X(\Omega) \to [0, 1]$$
$$x \mapsto \mathbb{P}_X := \mathbb{P}[\{X = x\}]$$

On note invariablement $\mathbb{P}[\{X = x\}], \mathbb{P}[X = x], P_X(x)$ ou $p(x)$ la probabilité que X prenne la valeur x. On vérifie aisément que cette application est bien une probabilité dont l'univers est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.

Exemple 3.2 *Si on reprend l'exemple d'un dé à six faces équilibrées, et que X représente le résultat d'un jet, on a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et directement*

$$\mathbb{P}_X[X(\Omega)] = \mathbb{P}_X[\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}] = \mathbb{P}[X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}] = 1$$

De même, l'axiome de l'événement impossible ($\mathbb{P}_X[\emptyset] = 0$) et de l'additivité pour des événements disjoints sont vériés. Donner la loi d'une variable aléatoire revient alors à donner les probabilités des événements élémentaires qu'elle induit, et on présente souvent ces données sous forme d'un tableau, en notant d'une manière générale $X(\Omega) = (x_i)i = 1, ... = (x_1, x_2, ..., x_N)$ pour une variable aléatoires à N valeurs possibles (qui ne sont pas forcément $1, 2, ..., N$), Où l'on note respectivement $p_1 = \mathbb{P}_X(1) = \mathbb{P}[X = 1], p_2 = \mathbb{P}_X(2) = \mathbb{P}[X = 2], ..., p_N = \mathbb{P}_X(N) = \mathbb{P}[X = N]$. Ce tableau peut se représenter graphiquement par un diagramme en batons.

X	x_1	x_1	...	x_N
P_X	P_1	P_2	...	P_N

Table 3.2 – Distribution de probabilité d'une variable aléatoires discrète

X	0	1	2
$P_X(x)$	1/4	1/2	1/4

Table 3.3 – Distribution de probabilité(X= nombre de "Face")

Exemple 3.3 $X(\Omega) = \{PP, FP, PF, FF\}$ $X =$ *nombre de "Face"*

3.3.1 Fonction de répartition

Définition 3.4 *Une loi de probabilité est souvent définie à partir de sa fonction de répartition*

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$$
$$x \mapsto F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

parfois également appelée fonction cumulative car on cumule les probabilités de toutes les valeurs inférieures ou égales à x.

Dans le cas discret, il suffit d'additionner les probabilités élémentaires :

$$F(x_i) = P[X \leq x_i] = P[X = x_1] + ... + P[X = x_i] = p_1 + p_2 + ... + p_i :$$

Propriétés 3.1 *Si X est une variable aléatoire discréte de fonction de répartition F, alors on a les propriétés suivantes :*
- F est une fonction en escalier avec $lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 et lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
- F est une fonction croissante.
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$,

$$F(b)..F(a) = P[a < X \leq b]$$

La croissance se déduit de ce dernier point puisque si $a < b$, $F(b)..F(a) = P[a < X \leq b] \in [0, 1]$ est en particulier positif.

3.3.2 Espérance mathématique

Définition 3.5 *L'espérance mathématique $E[X]$ d'une variable aléatoire X joue le rôle dévolu à la moyenne en statistiques : elle correspond à la valeur moyenne espérée* *par un observateur lors d'une réalisation de la variable aléatoire X. Les valeurs prises par cette variable sont pondérées par les probabilités des événements élémentaires de sorte que l'on définit*

$$E(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i * x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i * \mathbb{P}[X = x_i]$$

lorsque X peut prendre N valeurs différentes $x_1, ..., x_N$ avec comme probabilités élémentaires $p_i = P[X = x_i]$.

Exemple 3.4 *Lors du lancer de 2 pièces, le nombre de "face" moyen ou espéré correspond à l'espérance mathématique de la variable aléatoire X déja introduite, donnée par*

$$E(x) = \frac{1}{4}.0 + \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{4}.2 = 1$$

3.3.3 Variance

Pour décrire plus précisément le comportement de X, sans pour autant caractériser complétement la loi de X, on peut s'intéresser aux écarts de X par rapport à cette moyenne. Cependant, si on considére simplement la difference $X - E[X]$, on obtient un écart moyen $E[X - E[X]] = 0$ (par linéarité de l'espérance, voir 3.3). On pourrait considèrer la valeur moyenne de $X - E[X]$ mais on préfére considérer la moyen de $(X - E[X])^2$, plus pertinente mathématiquement.

Définition 3.6 *La variance mesure ainsi la déviation moyenne autour de la moyenne espérée $E[X]$, et est définie par*

$$V(x) = E[(X - E[X])^2] = \sum_{i=1}^{N} p_i.(x_i - E[X])^2$$

Propriétés 3.2 ***(formule de Koenig)*** *Elle est toujours positive puisqu'il s'agit de l'espérance d'un carré.*
On a l'expression suivante :

$$V(x) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Définition 3.7 *Pour mesurer la dispersion d'une variable aléatoire X, on considère souvent en statistiques **l'écart-type**, lié à la variance par :*

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Exemple 3.5 *Lorsque X est le nombre de face obtenu lors du lancer de 2 pièces équilibrées, la variance est*

$$V[X] = \frac{1}{4}.(0-1)^2 + \frac{1}{2}.(1-1)^2 + \frac{1}{4}.(2-1)^2 = \frac{1}{2}$$

Le lien entre la variance et le dispersion moyenne autour de la moyenne peut être explicité grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (cf (3.5)).

3.3.4 Propriétés de l'espérance et de la variance

Propriétés 3.3 ***(Linéarité de l'espérance)*** *Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers et a, b deux réels,*

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

En particulier, $E[aX] = aE[X]$.

Propriétés 3.4 ***(Non-linéarité de la variance)*** *Pour toute variable aléatoire X et $a, b \in \mathbb{R}$*

$$V(aX + b) = a^2 V[X]$$

Propriétés 3.5 ***(Inégalité de Markov)*** *Soit X une variable aléatoire positive d'espérance finie, alors pour tout $a > 0$*

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{1}{a} E[X]$$

Propriétés 3.6 ***(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)*** *Soit X une variable aléatoire réelle de variance finie, alors pour tout $a > 0$*

$$\mathbb{P}[|X - E[X]| \geq a] \leq \frac{1}{a^2} V(X)$$

3.4 Lois de probabilité discrètes usuelles

Lois discrétes usuelles On considère une variable aléatoire discrète X sur un univers quelconque Ω. Lorsque X prend n valeurs, l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est désigné par $(x_i)_{i=1...n}, i.e.(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$, et $(x_i)_{i \in N}$ lorsque X en prend une infinité. Le comportement aléatoire de X peut être trés diéfférent selon les phénoménes étudiés, et toute forme de loi est a priori envisageable. Cependant, certains paramétres objectifs de caractérisation (moyenne, dispersion, etc.) permettent de dégager des comportements récurrents et des familles de lois qui permettent une modélisation approchée raisonnable de la plupart des phénoménes alétoires courants. Nous décrivons ici les lois discrétes les plus importantes, à travers certains exemples de modélisations.

3.4.1 Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Définition 3.8 *Cette loi est celle de toute variable aléatoire X modélisant une expérience dont l'issue ne possède que deux alternatives de type "succés ou échec", "vrai ou faux", "marche ou arrêt", pile ou face", etc. Un succés est représenté par l'événement $\{X = 1\}$ tandis que $X = 0$ correspond à un échec $X(\Omega) = \{0, 1\}$. Puisque l'on a $P[X = 0] = 1 - P[X = 1]$, la loi de X ne dépend que d'un paramétre (la probabilité de succés) ; on parle alors de la loi de Bernoulli de paramétre p caractérisée par*

$$P[X = 1] = p$$

$$P[X = 0] = 1 - p$$

Propriétés 3.7 *(Espérance et variance)*

$$E[X] = p$$

$$V[X] = p(1 - p)$$

3.4.2 Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Définition 3.9 *La loi binomiale est la loi de probabilité d'une variable aléatoire représentant une série d'épreuves de Bernoulli possèdant les propriètés suivantes :*
- Chaque épreuve donne lieu à deux éventualités exclusives de probabilités constantes p et $q = 1..p$.
- Les épreuves répétées sont indépendantes les unes des autres.
- La variable aléatoire X correspondante prend pour valeur le nombre de succés dans une suite de n épreuves.

Deux paramétres, le nombre d'épreuves (identiques mais indépendantes) répétées n et la probabilité p de succéés dans lépreuve de Bernoulli en question caractérisent cette loi. Lors d'une telle expérience, on dit que X suit une binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, à valeurs dans $X() = \{1, 2, ..., n\}$.

Exemple 3.6 *Le nombre X de "Pile" obtenus au cours de n lancers indépendants d'une pièce équilibrée est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans {0, 1} et suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p = \frac{1}{2}$, puisque la probabilité de succés est celle d'obtenir un pile, i.e. $\frac{1}{2}$.*

Théorème 3.1 *On a par ailleurs*

$$X = X_1 + ... + X_k + ... + X_n$$

où les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p, correspondant au succés d'une seule épreuve de pile ou face.

Exemple 3.7 *Le nombre de boules rouges extraites au cours de n tirages successifs avec remise (pour assurer l'indépendance) d'une boule dans une urne contenant des boules rouges et blanches dans des proportions p et $q = 1-p$ est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.*

Pour déterminer les probabilités des événements élémentaires d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale, il nous faut tout d'abord déterminer le nombre de possibilités d'obtenir k succés au cours de n épreuves. Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons (non ordonnées) de k objets pris parmi n, avec bien sûr $k \leq n$. Les combinaisons sont non ordonnées car seul importe d'avoir k objets (succés pour nous) et non pas à quel(s) tirage(s) ces succés ont eu lieu. On connaître le nombre de possibilités de k succés et n échec, (C_k^n) il suffit de les multiplier par les probabilités de succés et d'échec pour obtenir la loi binomiale. On a donc :

Propriétés 3.8 *Les probabilités élémentaires d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ sont données pour tout nombre de succés $k = 1...n$ par :*

$$P[X = k] = C_k^n.p^k.(1-p)^{n-k}$$

Propriétés 3.9 *On a bien, en utilisant la formule du binome,*

$$\sum_{k=0}^{n} = P[X = k] = \sum_{k=0}^{n} = P[X = k]C_k^n.p^k.(1-p)^{n-k} = 1$$

Propriétés 3.10 *(Espérance et variance)*

$$E[X] = np$$

$$V[X] = np(1-p)$$

Démonstration :
On a l'écriture $X = X_1 + X_2 + ... + X_k + ... + X_n$, ou les X_k sont n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes. On a en effet par linéarité de l'espérance

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + ... + E[X_k] + ... + E[X_n] = n.E[X_1] = n.p$$

et par indépendance des variables aléatoires $(X_k)k = 1...n$

$$V[X] = V[X_1] + V[X_2] + ... + V[X_k] + ... + V[X_n] = n.V[X_1] = n.p.(1-p)$$

Exemple 3.8 *1. Un atelier comporte 10 machines identiques. Chaque machine a une probabilité $p = 0.01$ de tomber en panne à un moment dans la journée. Lorsque l'on suppose que les machines tombent en panne de manière indépendantes, la variable aléatoire X désignant le nombre de machines en panne à un moment donné*

dans la journée suit une loi $\mathcal{B}(10, 0.01)$. *Le nombre moyen de pannes par jour est donc* $E[X] = 10.0.01 = 0.1$, *la variance étant* $V[X] = 10.0.01.0.99 = 0.099$.
2. Une machine qui a une probabilité $p = 0.01$ *de tomber en panne dans la journée est amenée à fonctionner pendant 20 jours consécutifs. Alors, en supposant l'indépendance des pannes, i.e. si l'on considére qu'aprés chaque panne la machine est restaurée à l'identique,* X *suit une loi* $\mathcal{B}(20, 0.01)$.

3.4.3 Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Lorsque le nombre d'épreuves n devient trés important, la manipulation de la loi binomiale devient elle trés fastidieuse et est parfois remplacée en première approximation par son homologue asymptotique, la loi de Poisson (théorème 7). Celle-ci évalue le nombre aléatoire d'événements de même probabilité pendant une durée donnée. Elle peut modéliser par exemple le nombre d'appels récus par un standard téléphonique, le nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans la journée, etc. Pour des raisons tues ici, elle s'exprime à l'aide de la fonction exponentielle et dépend d'un paramètre $\lambda > 0$, qui correspond au nombre moyen d'occurence du phénomène observé pendant la durée donnée. Plus formellement :

Définition 3.10 *Une variable aléatoire* X *suit une loi de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$, *notée* $\mathcal{P}(\lambda)$ *lorsque* $X(\Omega) = N$ *et pour tout* $k \in N$

$$P_X(k) = P[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Propriétés 3.11

$$P[X = k + 1] = \frac{\lambda}{k+1}P[X = k]$$

Propriétés 3.12 *(Espérance et variance)*

$$E[X] = \lambda$$

$$V[X] = \lambda$$

Exemple 3.9 *Si on sait qu'en général un standard téléphonique reçoit 20 appels dans la journée et que l'on peut modéliser le nombre aléatoire d'appels par une loi de Poisson, on pourra calculer la probabilité d'avoir* k *appels, pour tout* k, *à l'aide des formules données par une loi de Poisson* $\mathcal{P}(20)$.

Remarque 3.1 *Dans la pratique, des tables donnant les probabilités élémentaires pour différentes valeurs du paramètre sont disponibles et utilisées.*

Remarque 3.2 *Si* X_1 *et* X_2 *sont deux variables aléatoires indépendentes suivant respectivement des lois de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda_1)$ *et* $\mathcal{P}(\lambda_2)$, *alors* $X = X_1 + X_2$ *suit une loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Démonstration :

$$P[X_1 = k_1] = e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!}$$
$$P[X_2 = k_2] = e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_1 + X_2 = k] &= \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}[\{X_1 = i\}\cap\{X_2 = k-i\}] \\
&= \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}[\{X_1 = i\}]\mathbb{P}[\{X_2 = k-i\}] \\
&= \sum_{i=1}^{k} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}
\end{aligned}$$

3.4.4 loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Définition 3.11 *On répète continuellement et de façon indépendante une expérience de deux résulta dont la probabilité de succès est p Soit X le nombre d'expérience pour obtenir un premier succès alors X suit une loi géométrique de paramètre p on de note $\mathcal{G}(p)$*

$$P[X = k] = (1-p)^{x-1}$$

Propriétés 3.13 *(Espérance et variance)*

$$E[X] = \frac{1}{p}$$
$$V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemple 3.10 *On lance un dé continuellement jusqu'à l'obtenir d'un six soit x le nombre de lancer nécessaire.*
1) Quelle est la probabilité d'obtenir un premier 6 à la deuxième lance.
2) calculer $E(x)$, $V(x)$ et $\sigma(x)$

Solution :
1-

$$p = 1/6, \quad x = 2$$
$$P(X = 2) = (1 - p)^{x-1} = (1 - 1/6)^{(2-1)} = 5/6$$

2-

$$E(x) = 1/((1/6)) = 6$$
$$V(x) = ((5/6))/((1/36)) = 30$$

3.4.5 loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, D)$

Définition 3.12 *On tire sans remis n objet d'un ensemble de N objet dont D possédant une caractéristique partiaire (et les autre N-D ne possédant pas) Soit x le nombre d'objet de l'échantillon que possédant le caractéristique (nombre que tire-parmi D) Alors $X \to \mathcal{H}(N, n, D)$*

$$P[X = x] = \frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

Propriétés 3.14 *(Espérance et variance)*

$$E[X] = n\frac{D}{N}$$
$$V[X] = n\frac{D}{N}\left(1 - \frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Exemple 3.11 *Une boite contient 8 composantes parmi les quelle 2 sont défectueuse trois composants sont pris au hasard est sans remise de la boite Soit x le nombre de composantes défectueuses dans l'échantillon.*
1) Donner la loi de probabilité ?
2) calculer $E(x)$, $V(x)$?

Solution :

$N = 8$, $n = 3$, $D = 2$ 1-

$$P[X = x] = \frac{C_x^2 C_{3-x}^{8-2}}{C_3^8} = \frac{C_x^2 C_{3-x}^6}{C_3^8}$$

2-

$$E(x) = 3 \times \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$
$$V(x) = 3 \times \frac{2}{8}\left(1 - \frac{2}{8}\right)\left(\frac{5}{7}\right)$$

3.5 Variable aléatoires continues

Définition 3.13 *On appelle variable aléatoire continue une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs est* $\mathbb{R}$ *ou une réunion d'intervalles de* $\mathbb{R}$.

Exemple 3.12 *Durée de vie d'une ampoule éléctrique : Bien que n'étant pas éternelle, on considére souvent qu'une ampoule éléctrique peut avoir n'importe quelle durée de vie et qu'elle peut tomber en panne ou ne pas tomber en panne à tout moment. Aucune durée n'est exclue et la variable* X *qui la représente est une variable aléatoire continue dont l'ensemble des valeurs est* $\mathbb{R}^+ = [0, +1[$. *D'une manière plus réaliste, les ampoules ont une durée de vie maximale* D *et* X *est une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle* $X(\Omega) = [0, D]$*, mais la durée maximale étant souvent inconnue, on considère généralement* $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.
- Étude de la taille dans une population donnée : Si on considére sur une population de taille N *dont on note ti la taille de chaque individu* $i(i = 1, ..., N)$*, la variable* X *qui dénote la taille d'un individu de la population pris au hasard, l'ensemble des valeurs prises par* X *est l'ensemble discret* $X(\Omega) = \{t_1, t_2, ..., t_N\}$. *Néanmoins, la taille d'un individu pouvant a priori prendre toute valeur réelle positive, on considère pour étudier des populations en général que* X *peut également prendre toutes les valeurs réelles et est donc une variable continue à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$ *(ou dans un sous-intervalle si on veut considèrer une taille maximale).*

Sa loi, c'est à dire la description des valeurs probables de X (avec quantification de ces probablités) est plus brièvement qualifiée de *loi continue*. La description d'une loi continue diffère de celles des lois discrètes puisque pour une variable aléatoire continue X, la probabilité que X prenne une valeur bien précise $xP_X(x) = P[X = x]$ est nulle. Il y a en effet une infinité de valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle, et au regard de toutes ces valeurs précises, le poids de la valeur particulière est tellement insignifiant qu'il en est nul ! Il n'est ainsi pas possible de définir la loi de X par la donnée des probabilités des événements élémentaires. Par contre, il est possible de déduire les probabilités que X prenne ses valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$ à partir de la fonction de répartition qui vaut dans ce cas continu

$$F(x) = P[X \leq x] = P[X < x]$$

3.5.1 Fonction de répartition

On considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X

$$F(x) = P[X \leq x]$$

Propriétés 3.15 *On a les propriétès suivantes :*
- F est une continue,
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
- F est une fonction croissante,
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$,

$$F(b) - F(a) = \mathbb{P}[a < X \leq b]$$

Le défaut de la fonction de répartition (que ne possède pas la notion de loi des variables aléatoires discrètes) est qu'elle ne fait pas apparaître l'additivité des probabilités. Fort du parallèle que l'on peut faire entre probabilités et surfaces, il est trés avantageux de restreindre l'étude à une classe de variables aléatoires dites à densité.

3.5.2 Fonction de densité

Définition 3.14 *Une variable aléatoire possède une densité si F_x est dérivable. La dérivée notée f_X est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.*

Propriétés 3.16 *De ce fait,*

$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(t)dt$$

,

et la probabilité de trouver X dans un intervalle $[a; b]$ donné apparaît comme l'aire d'une partie du graphique située entre la courbe de la densité f_X et l'axe des abscisses.

Remarque 3.3 *Dans les applications, il n'est pas nécéssaire de calculer ces aires à l'aide de calculs car des tables de lois recapitulant les valeurs principales existent.*

Propriétés 3.17 *La donnée d'une densité f permet donc de décrire complétement notre variable aléatoire en caractérisant sa loi grâce aux propriétès suivantes :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1$$

$$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(X)dx$$

3.6 Lois de probabilité contiues usuelles

3.6.1 Uniforme $\mathcal{U}([a,b])$

Cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné.

Définition 3.15 *La v.a. X suit une loi uniforme sur l'intervalle borné $[a,b]$ si elle a une densitée f constante sur cet intervalle et nulle en dehors. Elle est notée $\mathcal{U}([a,b])$. Sa densité est alors,*

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & si \quad x \in [a;b]\ ; \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Cette loi est l'équivalent continue de la loi discrète equirépartie. Son espérance est $E[X] = (b-a)/2$ et sa variance est $Var(X) = (b-a)^2/12$. Le résultat suivant permet d'éviter des calculs fastidieux pour déterminer la probabilité uniforme d'un intervalle.

Propriétés 3.18 *Si X est une v.a de loi uniforme sur $[a;b]$ alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:*

$$\mathbb{P}(X \in I) = \frac{l([a;b] \cap I)}{l([a;b])}$$

où $l(J)$ désigne la longueur de l'intervalle J (ex : $l([a;b]) = b - a$).

3.6.2 Exponentille $\varepsilon(\lambda)$

Définition 3.16 *Soit λ un réel strictement positif. La v.a X suit une loi exponentielle de paramètre λ, notée $\varepsilon(\lambda)$, si elle admet pour densité :*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}[0; +1[(x)$$

Son espérance est $E(X) = 1/\lambda$ et sa variance est $var(X) = 1/\lambda^2$. Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie. Par exemple, les temps d'attente à partir de maintenant du prochain tremblement de terre, de la prochaine panne d'un appareil, de la prochaine désintégration dans un réacteur nucléaire suivent des lois exponentielles. Le paramètre λ désigne alors l'inverse du temps d'attente moyen.

3.6.3 Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition 3.17 *Il s'agit d'une modi*

cation "spatiale" de la Loi normale : la forme en cloche de la densité est la propriétè principale de la famille des lois normales, qui peuvent éventuellement être translatée pour devenir assymétrique d'espérance non nulle μ, ou dilatée ou contractée autour de la moyenne en jouant sur la variance (Voir la figure 4.2 page 44). La densité est modifiée en

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

L'usage d'un changement de variable $t = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ permet de se ramener à un calcul d'intégrale à partir de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui nous permettra de consulter les tables existant pour la loi standard précédente. On a le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et Z la variable aléatoire définie par*

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$$

suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Propriétés 3.19 *(Espérance et variance)*

$$E[X] = \mu$$
$$V[X] = \sigma^2$$

Remarque 3.4 *On notera Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(1, 0.5)$. On utilise les valeurs de $\Phi(a)$ tabulées et le changement de variable pour calculer les valeurs de la fonction de répartition F d'une loi normale générale.*

Exemple 3.13 *Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 4)$ et Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a par exemple*

$$\begin{aligned} F_X(7) &= \mathbb{P}[X \leq 7] \\ &= \mathbb{P}[\frac{X-6}{2} \leq \frac{7-6}{2}] \\ &= \mathbb{P}[X \leq \frac{1}{2}] \\ &= \Phi(\frac{1}{2}) \\ &= 0.6915 \end{aligned}$$

Les valeurs ne sont tabulées que pour des valeurs de a positives, mais on s'en sort à l'aide de la propriété suivante de le fonction de répartition Φ de la loi normale :

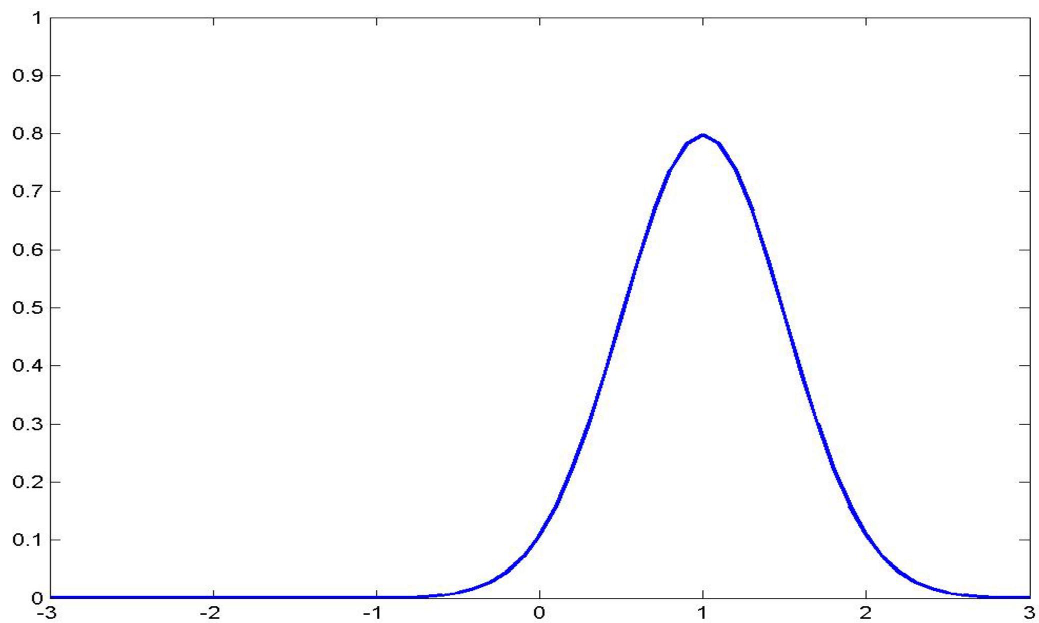


TABLE 3.4 – Densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}(1, 0.5)$.

Propriétés 3.20 ***(Espérance et variance)***
Soit Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$; on a alors

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

et en particulier $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. On a par ailleurs

$$\mathbb{P}[\mid Z \mid \leq a] = 2.\Phi(a) - 1$$

Exemple 3.14

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X > 1] &= \mathbb{P}[\frac{X-6}{2} > \frac{1-6}{2}] \\
&= \mathbb{P}[Z > \frac{-5}{2}] \\
&= \Phi(\frac{5}{2}) \\
&= 0.9938
\end{aligned}$$

3.7 Couples aléatoires

nous avons introduit la notion de variable aléatoire à une dimension, maintenant on va généraliser cette notion aux variables à deux dimensions (couple).

3.7.1 Définitions-Exemples

Définition 3.18 *Soient X, Y deux applications de Ω vers $\mathbb{R}$. Si X et Y sont deux variables aleatoires reelles alors le couple (X, Y) est appele couple aleatoire.*

Définition 3.19 *On jette deux dés équilibrés et on note par X le chiffre obtenu par le premier dé, Y la somme des chiffres obtenus. (X, Y) est un couple aléatoire.*

Exemple 3.15 *On prélève un groupe de TD au hasard et on mesure le poids et la taille des étudiants de ce groupe. On note par X la taille en cm et Y le poids en kg. (X, Y) est un couple aléatoire.*

Définition 3.20 *Soit (X, Y) un couple aléatoire, l'application $F_{(X,Y)}$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, F_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

est applée la fonction de répartition du couple (X, Y).

Comme dans le cas réel, la fonction de répartition possède de nombreuses bonnes propriétés :

Propriétés 3.21 *Soit (X, Y) un couple aléatoire, $F_{(X,Y)}$ sa fonction de répartition, alors*

- *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0 \leq F_{(X,Y)}(x, y) \leq 1$*
- $\lim_{xety \to -\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 0$ *et* $\lim_{xety \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 1$
- *Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $x \to F_{(X,Y)}(x, y)$ est croissante et continue a droite.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $y \to F_{(X,Y)}(x, y)$ est croissante et continue a droite.*

Définition 3.21 *Soit (X, Y) un couple aléatoire, Les fonctions de répartition marginales associées au couple (X, Y) sont données par :*

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y)$$

et

$$F_Y(x) = \lim_{X \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y)$$

3.7.2 Couples discrets

Définition 3.22 *Soient X, Y deux applications de Ω vers $\mathbb{R}$. On dit que (X, Y) est un couple aleatoire discret si X e Y sont deux variables aleatoire discretes.*

Définition 3.23 *Soit (X, Y) un couple aléatoire déscrèt, l'application $P_{(X,Y)}$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par*

$$P_{(X,Y)}(X, Y) \begin{cases} \mathbb{P}(X = x, Y = y) & si \quad (x, y) \in supp(X) \times supp(Y)\,; \\ 0, \quad sinon. \end{cases}$$

est applée la fonction de masse du couple (X, Y).

Exemple 3.16 *On jette deux dés équilibrés et on note par X le chiffre obtenu par le premier dé, Y la variable aléatoire qui vaut 1 si le deuxième dé ramène un chiffre inférieur ou égale à 4 et 0 sinon. La fonction de masse pour ce couple aléatoire est donnée par*

$$P_{(X,Y)}(X, Y) \begin{cases} \frac{2}{3} & si \quad (x, y) \in \{1, 2, 3, 4\} \times \{1\}\,; \\ \frac{1}{3} & si \quad (x, y) \in \{5, 6\} \times \{0\}\,; \\ 0, \quad sinon. \end{cases}$$

Remarque 3.5 *Les fonctions de masse marginales sont aussi appelées les lois marginales associées au couple (X, Y).*

Définition 3.24 *Soient (X, Y) un couple aléatoire discret, $P_{(X,Y)}$ sa fonction de masse. lŠespérance mathématique ou la moyenne du couple (X, Y) est $(E(X), E(Y))$.*

Définition 3.25 *Soient (X, Y) un couple aléatoire discret, alors*

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y).$$

3.7.3 Couples absolument continus

Définition 3.26 *Soient un couple aléatoire (X, Y) est absolument continu si sa fonction de répartition $F_{(X,Y)}$ est continue à droite et à gauche par rapport à chacune des variables et possède une dérivée seconde :*

$$\frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y}$$

sur un domaine non-vide $\mathcal{D}$.

Définition 3.27 *Soit (X, Y) un couple aléatoire absolument continu. La fonction*

$$f_{(X,Y)}(X, Y) \begin{cases} \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y} & si \quad (x, y) \in \mathcal{D}\,; \\ 0, \quad sinon. \end{cases}$$

est appelée la fonction de densité du couple (X, Y).

Proposition 3.1 *Une application* f *définie sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *est une fonction de densité si et seulement si*

- *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) \geq 0$.
- $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = 1$.

Remarque 3.6 *Les fonctions de densité marginales sont aussi appelées les lois marginales associées au couple* (X, Y).

Proposition 3.2 *Si* (X, Y) *est un couple aleatoire absolument continu, alors pour tout* $(x, y) \in \mathcal{D}$:

$$f_X(x) = F_X^{'}(x), \text{ et } f_Y(y) = F_Y^{'}(y).$$

Exemple 3.17 *Soient* $c \in \mathbb{R}$, f *la fonction definie par*

$$f(x, y) = cxye^{-x^2-y^2}, x, y \in \mathbb{R}^+$$

.

- *Déterminer* c *pour que* f *soit la fonction de densité d'un couple aléatoire* (X, Y).
- *Calculer* $F_{(X,Y)}$ *la fonction de répartition du couple* (X, Y).
- *En déduire les fonctions de répartitions marginales.*
- *Calculer les fonctions de densité marginale*

Définition 3.28 *Soient* (X, Y) *un couple aléatoire absolument continu,* $f_{(X,Y)}$ *sa fonction de densité. l'espérance mathématique ou la moyenne du couple* (X, Y) *est* $(E(X), E(Y))$.

3.7.4 Variables aléatoires indépendantes

La notion d'independance est tres importante en theorie des probabilités, elle est l'hypothese principale dans plusieurs resultats fondamentaux concernant le comportement asymptotique des moyennes de variables aleatoires. Commencons par rappeler la notion de tribu engendree par une variable aleatoire definie dans le troisieme chapitre. Soit X une variable aléatoire reelle, la tribu engendree par X et notee $\sigma(X)$ est definie par

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu boréliènne sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.29 *Soient X, Y deux variables aléatoires réelles. On dit que X et Y sont indépendantes si les tribus engendrées par les variables X et Y sont indépendantes. i. e.*

$$\forall A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

Remarque 3.7 *Vérifier l'indépendance de deux variables aléatoires revient à vérifier l'indépendance des tribus engendrées par ces deux variables.*
Ű De la même manière, la notion dŠindépendance ainsi définie peut être généralisée à plusieurs variables.

En général, il est difficile de prouver l'indépendance de deux variables aléatoires en utilisant cette définition, c'est pour cette raison que nous allons proposer d'autre critères.

Proposition 3.3 *Soient (X, Y) un couple aléatoire, $F_{(X,Y)}$ sa fonction de répartition, F_X et F_Y les fonctions de répartition marginales. Alors*

$$\textit{Les variables } X \textit{ et } Y \textit{ sont independantes} \Leftrightarrow F_{(X,Y)}(x, y) = FX(x)FY(y).$$

3.8 Convergence de suites de variables aléatoires

Tout au long de ce chapitre, $\{X_n, n \geq 1\}$ désignera une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

3.8.1 Convergence en probabilité

Définition 3.30 *On dit qu'une suite de variables aléatoires* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en probabilité vers une variable aléatoire* X*, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$$

On note $X_n \overset{P}{\to} X$.

Exemple 3.18 *Considérons la suite de variables aléatoires* $\{X_n, n \geq 1\}$ *où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives* $1 - \frac{1}{n}$ *et* $\frac{1}{n}$*, alors la suite* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge vers 0 en probabilité. En effet si* $\varepsilon > 0$ *alors deux cas peuvent se présenter :*
PREMIER CAS : $\varepsilon > 1$
Dans ce cas, il est clair que pour tout $n \geq 1$,

$$P\left(|X_n - 0| \geq \varepsilon\right) = P\left(X_n \geq \varepsilon\right) = 0$$

DEUXIEME CAS : $0 \leq \varepsilon \leq 1$
Dans ce cas, on a

$$P\left(|X_n - 0| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(X_n \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = \tfrac{1}{n}$$

d′ *où* $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Proposition 3.4 *Soient* $\{X_n, \quad Y_n n \geq 1\}$ *deux suites de variables aléatoires,* f : R $\to$ R *une fonction continue. Supposons que* $X_n, n \geq 1($ *resp.* $Y_n n \geq 1)$ *converge en probabilité vers une variable aléatoire* $X($ *resp.* $Y)$*, alors*
− *Pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha X_n + \beta Y_n \overset{P}{\to} \alpha X + \beta Y$
$-X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$
$-f\left(X_n\right) \xrightarrow{P} f(X)$

3.8.2 Convergence en moyenne

Définition 3.31 *Soit X une variable aléatoire réelle.*

– *On dit que X est intégrable si $\mathbb{E}(|X| < \infty)$*

– *On dit que X est de carré intégrable si $\mathbb{E}\left(|X|^2 < \infty\right)$*

– *Si $p \geq 1$, on dit que X est dans $L^p(\Omega)$ si $\mathbb{E}\left(|X|^p < \infty\right)$*

Définition 3.32 *On dit qu'une suite de variables aléatoires intégrables $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en moyenne vers une variable aléatoire X, si*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|\right) = 0$$

On note $X_n \to X$ en moyenne.

Définition 3.33 *On dit qu'une suite de variables aléatoires de carré intégrable $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X, si $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^2\right) = 0$*
On note $X_n \to X$ en moyenne quadratique.

Remarque 3.8 *Il faut bien noter que*

- On ne peut pas parler de la convergence en moyenne (resp. en moyenne quadratique) si les variables considérées ne sont pas intégrables (resp. de carré intégrable).

- Lorsqu'une suite de variables aléatoires intégrables $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en moyenne (resp. en moyenne quadratique) vers une variable aléatoire X alors X est aussi intégrable i. e. $\mathbb{E}(|X| < \infty)$. (resp. de carré intégrable i. e. $E\left(|X|^2\right) < \infty$)

Exemple 3.19 *Considérons la suite de variables aléatoires $\{X_n, n \geq 1\}$ où chaque variable X_n prends les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $1 - e^{-n}$ et e^{-n}, alors la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ converge vers 0 en moyenne. En effet si $n \geq 1$, alors Dans ce cas, il est clair que pour tout $n \geq 1$*

$$\mathrm{E}\left(|X_n - 0|\right) = \mathrm{E}\left(X_n\right) = e^{-n} \longrightarrow 0$$

lorsque $n \to +\infty$.

3.8.3 Convergence presque sûre

Définition 3.34 *On dit qu'une suite de variables aléatoires* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge presque sûrement vers une variable aléatoire* X*, si*

$$P\left\{\omega \in \Omega, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1$$

On note $X_n \longrightarrow X$ *p. s.*
Un critère très utilisé pour établir la convergence presque sûre pour une suite des variables aléatoires réelles est donné par le résultat suivant :

Théorème 3.3 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires.*
– *Supposons que pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) < \infty$$

alors la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge presque surement vers* X*.*
– *Réciproquement, si* $\{X_n, n \geq 1\}$ *est une suite de v. a. r indépendantes qui converge presque sûrement vers* X*, alors la condition 6.1 est vérifiée.*

Exemple 3.20 *Considérons la suite de variables aléatoires* $\{X_n, n \geq 1\}$ *où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives* $1 - \frac{1}{n^2}$ *et* $\frac{1}{n^2}$*, alors la suite* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge vers 0 presque sûrement. En effet si* $\varepsilon > 0$*, alors on peut considérer les deux cas suivants :*
PREMIER CAS : $\varepsilon > 1$ *Il est clair que dans ce cas, on a pour tout* $n \geq 1$

$$P\left(|X_n - 0| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(X_n \geq \varepsilon\right) = 0$$

$\frac{\textit{DEUXIEME CAS}}{\textit{Dans ce cas, on a}}$: $0 \leq \varepsilon \leq 1$

$$P\left(|X_n - 0| \geq \varepsilon\right) = P\left(X_n \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = \tfrac{1}{n^2}$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$*, on a bien*

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - 0| \geq \varepsilon\right) < \infty$$

Ainsi la condition 3.3 est vérifiée et la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge presque sûrement vers* 0.

3.8.4 Convergence en loi

On rappelle que si X est une variable aléatoire, sa loi que nous avons notée P_X est une probabilité définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ par

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad P_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

On rappelle aussi que si X est une variable aléatoire réelle, on peut lui associer une fonction réelle qu'on appelle fonction de répartition, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$$

On a vu aussi que deux variables aléatoires ont même loi (i.e. $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$) si et seulement si elles ont la même fonction de répartition i. e. $F_X = F_Y$. Pour une suite de variables aléatoire $\{X_n, n \geq 1\}$, on note $\{F_n, n \geq 1\}$ (resp. φ_n) la suite des fonctions de répartitions associées (resp. la suite des fonctions caractéristiques associées) i.e. pour tout $x, t \in \mathbb{R}$:

$$\forall n \geq 1, \quad F_n(x) = F_{X_n}(x) \quad \text{et} \quad \varphi_n(t) = \varphi_{X_n}(t)$$

Définition 3.35 *Soient $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles, $\{F_n, n \geq 1\}$ la suite des fonctions de répartitions correspondantes. On dit que $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en loi vers une variable aléatoire X de fonction de répar- tition F_X, si*

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(t) = F_X(t)$$

pour tout point t où F_X est continue. On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Exemple 3.21 *Soient $\alpha > 0, \{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même fonction de densité :*

$$f(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$$

et posons pour $n \geq 1$:

$$Y_n = n^{-\frac{1}{\alpha}} \max_{1 \leq k \leq n} X_k$$

La suite de variables aléatoires $\{Y_n, n \geq 1\}$ converge en loi vers la variable Y de loi

$$f_Y(y) = \alpha y^{-(\alpha+1)} e^{-y^{-\alpha}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

En effet, on a pour tout $x > 1$, la fonction de répartition pour chaque variable X_n est

$$F(x) = \int_0^x \alpha t^{-(\alpha+1)} dt = 1 - x^{-\alpha}$$

Par suite, si $x > 0$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}\left(n^{-\frac{1}{\alpha}} \max_{1\le k\le n} X_k \le x\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n} X_k \le n^{\frac{1}{\alpha}} x\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\forall 1 \le k \le n, X_k \le n^{\frac{1}{\alpha}} x\right)\\ &= \left(F\left(n^{\frac{1}{\alpha}} x\right)\right)^n\\ &= \left(1 - \frac{1}{nx^\alpha}\right)^n\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall x > 0, \quad F_{Y_n}(x) \longrightarrow e^{-x^{-\alpha}}$$

lorsque $n \to +\infty$, pour tout $x > 0$. Ceci prouve la convergence en loi de la suite $\{Y_n, n \ge 1\}$. En dérivant cette dernière fonction on obtient la loi de Y. Dans bien des situations, il est difficile de montrer la convergence en loi d'une suite da variables aléatoires en utilisant la définition, c'est pourquoi le résultat suivant peut être d'une grande utilité :

Proposition 3.5 *Soient $\{X_n, n \ge 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles,$\{\varphi_n, n \ge 1\}$ la suite des fonctions caractéristiques correspondantes. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*
− $\{X_n, n \ge 1\}$ converge en loi vers X − Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \varphi_X(t)$
− Pour toute fonction continue et bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f\left(X_n\right)\right) = \mathbb{E}(f(X))$$

De cette dernière proposition, on peut déduire le résultat suivant :

Proposition 3.6 *Soient $\{X_n, n \ge 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles,$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si la suite $\{X_n, n \ge 1\}$ converge en loi vers une variable aléatoire X alors la suite $\{h\left(X_n\right), n \ge 1\}$ converge en loi vers la variable aléatoire $h(X)$.*

Exemple 3.22 *Soient $\{p_n, n \ge 1\}$ une suite de nombres réels, $\{X_n, n \ge 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles. Supposons que pour tout $n \ge 1$:*

$$0 < p_n < 1, \quad X_n \leftrightarrow \mathcal{B}\left(n, p_n\right)$$

et qu'il existe $\lambda > 0$, vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$$

Alors il existe une variable aléatoire $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, telle que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
<u>*SoLUTION :*</u> *Faisont appel au deuxieme point de la Proposition 6.2 pour établir ce résultat, en effet on sait (voir Chapitre 4) que si $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$$

De même, on a vu au chapitre 4 aussi que si φ_n est la fonction caractéristique de la variable X_n, alors on a pour $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_n(t) = (1 - p_n + p_n e^{it})^n$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= \left(1 - p_n\left(1 - e^{it}\right)\right)^n \\ &= \left(1 - np_n\frac{(1 - e^{it})}{n}\right)^n\end{aligned}$$

Mais

$$\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$$

Ainsi on a

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - np_n\frac{(1 - e^{it})}{n}\right)^n = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} = \varphi_X(t)$$

D'où le résultat .

3.8.5 Comparaison des modes de convergence

On a défini quatre modes de convergence, se sont les plus imprtants en probabilité, à présent nous étudions les relations qui existent entre ces modes de convergence, afin de comprendre les différentes situations qui peuvent se pré- senter. Nous commençons par le lien entre la convergence presque sûre et la convergence en probabilité :

Proposition 3.7 *Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles, Alors*
−Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge presque súrement vers X alors elle converge en probabilité vers X.*

− *Il existe une suite $\{X_n, n \geq 1\}$ qui converge en probabilité mais qui ne converge pas presque sûrement.*

−Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en probabilité vers X alors il existe une suite de nombres naturels positifs $\{m_n, n \geq 1\}$ strcictement croissante, telle que la sous-suite $\{X_{m_n}, n \geq 1\}$ converge presque sûrement vers X*

Pour la convergence en moyenne et en moyenne quadratique, on a

Proposition 3.8 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires réelles.*

$-$Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en moyenne vers* X *alors elle converge en probabilité vers* X.

$-$ *Il existe une suite* $\{X_n, n \geq 1\}$ *qui converge en probabilité mais qui ne converge pas en moyenne.*

$-$Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en moyenne quadratique vers* X *alors elle converge en moyenne vers* X *et donc en probabilité vers* X.

En fin, concernant la convergence en loi, nous avons

Proposition 3.9 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires réelles,*
Alors
$-$Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en probabilité vers une v. a.* r *, elle converge aussi en loi vers* X.
$-$ *Il existe une suite* $\{X_n, n \geq 1\}$ *qui converge en loi mais qui ne converge pas en probabilité.*
$-$Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en loi vers une constante* C *alors elle converge aussi en probabilité vers* C.
Nous n'allons pas donner la preuve des liens entre ces différents modes de convergence, car elle nécessite des outils mathématiques qui n'entrent pas dans le cadre de ce cours (théorie de la mesure), cependant nous donnerons quelques exemples simples afin d'illustrer le fait qu'on peut avoir la convergence dans un mode précis et pas dans un autre.
La convergence en probabilité n'implique pas la convergence presque sûre :
Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ *la suite de variables aléatoires indépendantes où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilité respectives* $1 - \frac{1}{n}$ *et* $\frac{1}{n}$. *On a vu dans l'exemple 6.1 que cette suite converge en probabilité vers* 0, *cependant si* $0 < \varepsilon < 1$, *alors*

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \sum_{n\geq 1} P\left(X_n = 1\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$$

D'après le deuxiemme point du Théorème 6.1, la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ *ne peut pas converger vers 0 presque sûrement.*
La convegence en probabilité n'implique pas la convergence en moyenne :
Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ *la suite de variables aléatoires où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et n avec les probabilité respectives* $1 - \frac{1}{n}$ *et* $\frac{1}{n}$. *Comme pour l'exemple* 6.1, *il n' n'est pas difficile de vérifier que cette suite converge en probabilité vers* 0. *D'autre part*

$$\mathbb{E}\left(|X_n - 0|\right) = \mathrm{E}\left(X_n\right) = 1$$

Ainsi cette suite ne converge pas en moyenne.
La convegence en loi n'implique pas la convergence en probabilité :
Soit $X \leftrightarrow \mathcal{N}(0,1), Y = -X$ *et posons pour* $n \geq 1, X_n = X$. *Une variable de loi* $\mathcal{N}(0,1)$

est symétrique, ainsi X *et* Y *ont la même loi, d'autre part il est évident que* X_n *converge en loi vers* X *donc vers* Y *aussi. Mais comme* $Z := X - Y \leftrightarrow \mathcal{N}(0,2)$, *on peut voir que*
$P\left(|X_n - Y| \geq 2\right) = IP(|X - Y| \geq 2) = P(|Z| \geq 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{8}} dx > 0$

Ainsi, la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ *ne converge pas en probabilité.*
La convergence presque sûre n'implique pas la convergence en moyenne
Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ *la suite de variables aléatoires où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et* n^2 *avec les probabilités respectives* $1 - \frac{1}{n^2}$ *et* $\frac{1}{n^2}$. *Remarquons tout d'abord que pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \sum_{n \geq 1} P\left(X_n = n^2\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$$

A présent, le Théorème 6.1 permet de conclure que la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge presque súrement vers* 0. *D'un autre coté*

$$\mathrm{E}\left(|X_n - 0|\right) = \mathrm{E}\left(X_n\right) = 1$$

Cette suite ne peut pas converger vers 0 en moyenne.
La convegence en moyenne n'implique pas la convergence presque sûre :
Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ *la suite de variables aléatoires indépendantes où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et* $\sqrt{n}$ *avec les probabilités respectives* $1 - \frac{1}{n}$ *et* $\frac{1}{n}$. *En faisant appel encore une fois au Théorème* 6.1, *on montre que cette suite ne converge pas presque sûrement. D'autre part*

$$\mathrm{E}\left(|X_n - 0|\right) = \mathrm{E}\left(X_n\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

Par suite, cette suite converge vers 0 en moyenne. On arrive donc au résultat suivant :

Proposition 3.10 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires réelles, alors*

- *La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.*

- *La convergence en probabilité implique la convergence en loi.*

- *La convergence en moyenne implique la convergence en probabilité.*

- *Les implications réciproques sont en général fausses.*

3.9 Lois des grands nombres (LGN)

Cette partie est consacré à la délicate question de la convergence en théorie des probabilités est ses corollaires légendaires : les lois des grands nombres, Elle est délicate car il y'a au moins quatre modes de convergence.
Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, Dans ce paragraphe on s'intéresse au comportement des moyennes arithmétiques

$$\overline{X}_n = \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} X_k$$

lorsque n devient de plus en plus grands. Les résultats concernant ce problème sont appelés : Lois des Grands Nombres : (LGN).

3.9.1 Lois faibles des grands nombres

Nous commençons par établir deux résultats de la seconde famille de lois :

Proposition 3.11 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoire réelles indépendantes, centrées et de carré intégrable. Supposons que*

$$\tfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\,(X_k) \longrightarrow 0$$

alors les moyennes $\left\{\overline{X}_n, n \geq 1\right\}$ *convergent vers 0 en probabilité. Comme corollaire direct de ce résultat, on obtient*

Théorème 3.4 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoire réelles indépendantes, de même loi et de carré intégrable. Posons* $\mu = \mathrm{E}\,(X_1)\,,$ *alors*

$$\overline{X}_n \longrightarrow \mu$$

en probabilité lorsque $n \to \infty$

PREUVE
Pour $k \geq 1$, posons $Y_k = X_k - \mu, \sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X_k) = \mathrm{Var}\,(Y_k)\,.$ La suite $\{Y_n, n \geq 1\}$ est par construction une suite de v. a. r indépendantes et centrées, de plus

$$\tfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\,(Y_k) = \frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0$$

Par la proposition précédente,

$$\tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu) \longrightarrow 0$$

en probabilité, ainsi

$$\overline{X}_n = \tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \longrightarrow \mu$$

en probabilité.

3.9.2 Lois fortes des grands nombres

Pour la seconde famille des lois des grands nombres, on a la loi forte des grands nombres de Kolmogorov :

Théorème 3.5 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoire réelles, indépendantes, intégrables et de même loi. Posons* $\mu = \mathbb{E}(X_1)$, *alors*

$$\overline{X}_n \longrightarrow \mu$$

presque surement lorsque $n \to \infty$

3.10 Exercices

Exercice 3.1 *Soit X une variable aléatoire dont la densité est :*

$$\forall x \in [0,2], f_X(x) = c(4x - 2x^2)$$

1. *Calculer la valeur de c.*
2. *Calculer $E(x)$,$V(x)$ et σ_x.*
3. *Calculer la fonction de répartition.*

Exercice 3.2 *On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Calculer avec deux méthodes la probabilité p pour qu'il y ait :*

1. *Trois fois face.*
2. *Deux fois face.*
3. *Aucune fois face.*

Exercice 3.3 *Soit $P \in [0,1]$;$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in R^{+*}, \forall x \in \mathbb{N}$. la loi de poisson est donnée par :*

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Montrer que :

1. *La distribution de poisson est une distribution de probabilité.*
2. $E(x) = \lambda, V(x) = \lambda$.

Exercice 3.4 *On suppose que 0.02 des articles produits par une usine sont défectueux.*
Calculer la probabilité P pour que dans un échantillon de 100 articles il y ait 3 articles défectueux.

Exercice 3.5 $\forall \lambda \in R^{+*}, \forall x \geq 0$. *la loi exponentielle est donnée par :*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Montrer que :

1. *La distribution de cette loi est une distribution de probabilité.*
2. $E(x) = \frac{1}{\lambda}, V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exercice 3.6 *Une variable X soit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.*

1. *Trouver le paramètre de cette loi sachant que $P(X \leq 70) = 0.05$.*
2. *Déduisez-en $P(X > 30)$*

Exercice 3.7 *Le temps mesuré en heure nécessaire pour réparer une certaine machine suit une loi exponentielle de paramètre* $\lambda = \frac{1}{2}$.

1. *Quelle est la probabilité que le temps de répartition excède deux heures ?*
2. *Quelle est la probabilité qu'une réparation prend au moins dix heures.*

Exercice 3.8 *Soit une variable aléatoire suivant la loi normale centré réduite . Calculer la probabilité et la valeur t : (1)* $P(0 \leq X \leq 1,42)$. *(2)* $P(-0,73 \leq X \leq 0)$. *(3) 3-* $P(|X| \leq 0,5)$. *(4)*$P(X \geq 1,13)$. *(5)*$P(0 \leq X \leq t) = 0,4236$. *(6)*$P(X \leq t) = 0,7967$. *(7)*$P(t \leq X \leq 2) = 0,1$.

Exercice 3.9 *On suppose que la température* T *pendant le mois de juin suit une loi normale de moyenne 20º et d'écart-type 3º. Calculer la probabilité* P *pour que la température soit comprise entre 21º et 26º.*

Exercice 3.10 *On suppose que le poids* P *de 800 étudiants suit une loi normale de moyenne 66 kg et d'écart-type 5 kg. Calculer le nombre* N *d'étudiants ayant des poids :*

1. *Entre 65 et 70.*
2. *Supérieurs ou égaux à 72.*

Exercice 3.11 *On jette 12 fois une pièce de monnaie bien équilibrée .Calculer la probabilité* P *pour que le nombre de faces soit compris entre 4 et 7. Avec :*

1. *la distribution binomiale.*
2. *l'approximation par la loi normale.*

Chapitre 4

Annexe

4.1 Solution d'exercices

Exercice1.1 :

1.
$$10 \times 9 \times 8 \times 26 \times 25$$

2.
$$9 \times 9 \times 8 \times 26 \times 25$$

Exercice1.2 :

1.
$$A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

2.
$$A_4^4 = P! = 4!$$

Exercice1.3 :

1.
$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4!9!}$$

2.
$$(C_9^3 \times C_3^1) + (C_9^2 \times C_3^2) + (C_9^1 \times C_3^3)$$

3.
$$C_9^3 \times C_3^1$$

Exercice1.4 :

1. Mississippi : $n = 10$, $n_1 = 1, n_2 = 4, n_3 = 4, n_4 = 1$.
$$P_{10} = \frac{10!}{1!4!4!1!}$$

2. Factoriel :

$$P_9 = 9!$$

3. Proposition : $n = 11,\ n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 3, n_4 = 1, n_5 = 1, n_6 = 1, n_7 = 1, n_8 = 2$

$$P_{10} = \frac{11!}{2!1!3!1!1!1!1!2!}$$

Exercice1.5 :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

1. On pose $a = 1$ et $b = 1$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times 1 \times 1$$

$$2 = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + ...C_n^n$$

2. On pose $a = 1$ et $b = -1$:

$$0 = (1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k$$

Exercice1.8 :

1.

$$\begin{cases} p(A) = 2p(B) \\ p(B) = 2p(C) \\ p(A) + p(B) + p(C) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(A) = 2(2p(C)) = 4p(C) \\ p(A) + p(B) + p(C) = 1 \\ 4p(C) + 2p(C) + p(C) = 1 \end{cases}$$

$$7p(C) = 1 \to p(C) = \frac{1}{7}$$

$$p(B) = 2(\frac{1}{7}) = \frac{2}{7}$$

$$p(A) = \frac{4}{7}$$

2.
$$p(B \cup C) = p(B) + p(C) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

Exercice1.9 :

1.
$$p(A) = \frac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}}$$

2.
$$p(B) = \frac{C_{5}^{1} \times C_{10}^{2}}{C_{15}^{3}}$$

3.
$$p(C) = \frac{C_{5}^{1} \times C_{10}^{2} + C_{5}^{2} \times C_{10}^{1} + C_{5}^{3} \times C_{10}^{0}}{C_{15}^{3}}$$

Exercice2.1 :
$$\frac{C_{7}^{1}}{C_{10}^{1}} \times \frac{C_{6}^{1}}{C_{9}^{1}} \times \frac{C_{3}^{1}}{C_{8}^{1}}$$

Exercice2.2 :

1.
$$\frac{C_{4}^{1}}{C_{7}^{1}} \times \frac{C_{3}^{1}}{C_{6}^{1}} \times \frac{C_{3}^{1}}{C_{5}^{1}} \times \frac{C_{2}^{1}}{C_{4}^{1}} \times \frac{C_{2}^{1}}{C_{2}^{1}} \times \frac{C_{3}^{1}}{C_{1}^{1}}$$

2.
$$\frac{C_{3}^{1}}{C_{6}^{1}} \times \frac{C_{3}^{1}}{C_{5}^{1}} \times \frac{C_{2}^{1}}{C_{4}^{1}} \times \frac{C_{2}^{1}}{C_{3}^{1}} \times \frac{C_{1}^{1}}{C_{2}^{1}} \times \frac{C_{1}^{1}}{C_{1}^{1}}$$

Exercice2.3 :

1. $M \rightarrow$ les élèves ont échouent en mathématique $C \rightarrow$ les élèves ont échouent en chémie $M \cap C \rightarrow$ les élèves ont échouent en M et C
$$p(M/C) = \frac{p(M \cap C)}{p(C)} = \frac{0.1}{0.15} = 0.66$$

2.
$$p(C/M) = \frac{p(M \cap C)}{p(M)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$$

3.
$$p(M \cup C) = p(M) + p(C) - p(M \cap C) = 0.25 + 0.15 - 0.1 = 0.25$$

Exercice2.4 :
$$p(A) = 0.6 \qquad p(D/A) = 0.02$$
$$p(B) = 0.3 \qquad p(D/B) = 0.03$$
$$p(C) = 0.1 \qquad p(D/C) = 0.04$$

$$\begin{aligned} p(C/D) &= \frac{p(D\cap C)}{p(D)} \\ &= \frac{p(C).p(D/C)}{p(D)} \end{aligned}$$

$$p(D\cap C) = p(C).p(D/C)$$

$$\begin{aligned} p(D) &= p(D\cap A) + p(D\cap B) + p(D\cap C) \\ &= p(A).p(D/A) + p(B).p(D/B) + p(C).p(D/C) \\ &= 0.6\times 0.02 + 0.3\times 0.1\times 0.04 \\ &= 0.025 \end{aligned}$$

$$=$$

$$\begin{aligned} p(C\cap D) &= \frac{0.1\times 0.04}{0.025} \\ &= 0.16 \end{aligned}$$

Exercice2.5 :

$$p(G) = 0.4 \qquad p(M/G) = 0.04$$
$$p(f) = 0.6 \qquad p(M/f) = 0.01$$

$$\begin{aligned} p(f/M) &= \frac{p(f\cap M)}{p(M)} \\ &= \frac{p(f).p(f/M)}{p(M)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(M) &= p(M\cap f) + p(M\cap G) \\ &= p(f).p(M/f) + p(G).p(M/G) \\ &= 0.6\times 0.01 + 0.4\times 0.04 \\ &= 0.022 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(f\cap M) &= \frac{0.4\times 0.04}{0.022} \\ &= 0.72 \end{aligned}$$

Exercice2.6 :

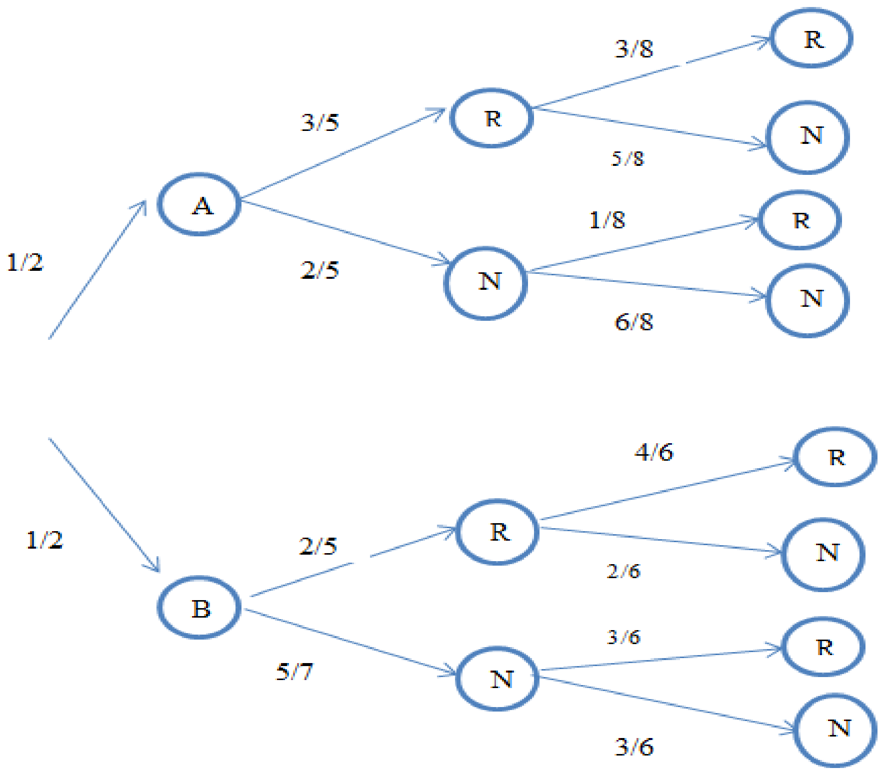


FIGURE 4.1 – diagramme en arbre

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{6}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{6}$$

Exercice2.7 :

$A \longrightarrow$(3 pièces détachés défectueuse + 5 bonne).

$B \longrightarrow$(2 défectueuse + 3 bonne).

1. $$p(A) = \frac{C_3^1}{C_8^1} \times \frac{C_1^2}{C_1^5}$$

2. $$p(B) = \frac{C_3^1}{C_8^1} \times \frac{C_2^1}{C_8^1} + \frac{C_5^1}{C_8^1} \times \frac{C_2^1}{C_5^1}$$

Exercice3.1 :

1.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 c(4x-2x^3)dx\\ &= [c(2x^2-\frac{2}{3}x^4)]_0^2\\ &= 1\\ &\Rightarrow c=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}E(x) &= \int_0^2 xf(x)dx\\ &= \frac{3}{8}\int_0^2 x(4x-2x^3)dx\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(x) &= E(x^2)-E(x)^2\\ &= \int_0^2 x_2 f(x)dx-1\\ &= 4\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt\\ &= \int_{-\infty}^x \frac{3}{8}(4t-2t^3)dt\\ &= \frac{3}{8}(2x^2-\frac{2}{3}x^3)\end{aligned}$$

Exercice3.2 :

$$\Omega = 2^3 = 8 = fff, ppp, ppf, ffp, pfp, fpf, pff, fpp$$

1^{re} méthode :

1. P(A)=1/8
2. P(B)=3/8
3. P(C)=1/8

2^{me} méthode :avec l'utilisation de la loi de Binomiale :

Exercice3.4 :
$n = 100$, $x = 3$, $p = 0.02$, $q = 0.98$

$$P(X = 3) = C_{100}^{3}(0.02)^3(0.98)^{97}$$

Exercice3.8 :

1.

$$\begin{aligned} p(0 \leq X \leq 1.42) &= \Phi(1.42) - \Phi(0) \\ &= 0.9222 - 0.6 \\ &= 0.4222 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} p(0.73 \leq X \leq 1.42) &= \Phi(0) - [1 - \Phi(0.73)] \\ &= 0.5 - 1 + 0.7673 \\ &= 0.2673 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} p(-0.5 \leq X \leq 0.5) &= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) \\ &= \Phi(0.5) - [1 - \Phi(0.5)] \\ &= \Phi(0.5) - 1 + \Phi(0.5) \\ &= 0.6915 - 1 + 0.6915 \\ &= 0.383 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} p(X \geq 1.13) &= 1 - p(X \leq 1.13) \\ &= 1 - 8709 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} p(0 \leq X \leq t) &= 0.4236 \\ \Phi(t) - \Phi(0) &= 0.4236 \\ \Phi(t) &= \Phi(0) + 0.4236 \\ &= 0.5 + 0.4236 \\ &= 0.9236 \Rightarrow t = 1.43 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} p(X \leq t) &= 0.7967 \\ \Phi(t) &= 0.7967 \Rightarrow t = 0.83 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} p(t \leq X \leq 2) &= 0.1 \\ \Phi(2) - \Phi(t) &= 0.1 \\ \Phi(t) &= \Phi(2) - 0.1 \\ &= 0.9772 - 0.1 \\ &= 0.8772 \Rightarrow t = 1.16 \end{aligned}$$

Exercice3.9 :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{21-20}{3} \leq \frac{X-4}{5} \leq \frac{26-20}{3}\right) &= P\left(0.33 \leq t \leq 2\right) \\ \Phi(2) - \Phi(0.33) &= 0.9772 - 0.6293 \\ &= 0.3479 \end{aligned}$$

Exercice3.10 :

1.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{65-66}{5} \leq \frac{X-66}{5} \leq \frac{70-66}{5}\right) &= P\left(-\frac{1}{5} \leq t \leq \frac{4}{5}\right) \\ &= \Phi(\frac{4}{5}) - \Phi(-\frac{1}{5}) \\ &= \Phi(\frac{4}{5}) - [1 - \Phi(\frac{1}{5})] \\ &= 0.7881 - 1 + 0.5793 \\ &= 0.3674 \end{aligned}$$

Le nombre $\rightarrow 0.3674 \times 800 = 294$

2.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X-66}{5} \geq \frac{72-66}{5}\right) &= P\left(t \geq \frac{6}{5}\right) \\ &= 1 - P\left(t \leq \frac{6}{5}\right) \\ &= 1 - \Phi(\frac{6}{5}) \\ &= 1 - 0.8849 \\ &= 0.1151 \end{aligned}$$

Le nombre $\rightarrow 0.1151 \times 800 = 92$

4.2 Tables statistiques usuelles

Tables Statistiques usuelles

Table 1

Loi Binomiale

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 10

k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n=20

k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000
2	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002
3	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013
4	0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059
5	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207
6	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577
7	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316
8	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517
9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119
10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881
11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483
12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Loi Binomiale (suite)

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 25

k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,2774	0,0718	0,0172	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,6424	0,2712	0,0931	0,0274	0,0070	0,0016	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
2	0,8729	0,5371	0,2537	0,0982	0,0321	0,0090	0,0021	0,0004	0,0001	0,0000
3	0,9659	0,7636	0,4711	0,2340	0,0962	0,0332	0,0097	0,0024	0,0005	0,0001
4	0,9928	0,9020	0,6821	0,4207	0,2137	0,0905	0,0320	0,0095	0,0023	0,0005
5	0,9988	0,9666	0,8385	0,6167	0,3783	0,1935	0,0826	0,0294	0,0086	0,0020
6	0,9998	0,9905	0,9305	0,7800	0,5611	0,3407	0,1734	0,0736	0,0258	0,0073
7	1,0000	0,9977	0,9745	0,8909	0,7265	0,5118	0,3061	0,1536	0,0639	0,0216
8	1,0000	0,9995	0,9920	0,9532	0,8506	0,6769	0,4668	0,2735	0,1340	0,0539
9	1,0000	0,9999	0,9979	0,9827	0,9287	0,8106	0,6303	0,4246	0,2424	0,1148
10	1,0000	1,0000	0,9995	0,9944	0,9703	0,9022	0,7712	0,5858	0,3843	0,2122
11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9985	0,9893	0,9558	0,8746	0,7323	0,5426	0,3450
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9966	0,9825	0,9396	0,8462	0,6937	0,5000
13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9940	0,9745	0,9222	0,8173	0,6550
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9982	0,9907	0,9656	0,9040	0,7878
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9971	0,9868	0,9560	0,8852
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9957	0,9826	0,9461
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9942	0,9784
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9927
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9980
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995
21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Loi Binomiale (suite)

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 50

k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
8	0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000
9	0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0067	0,0008	0,0001	0,0000
10	1,0000	0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0160	0,0022	0,0002	0,0000
11	1,0000	0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0342	0,0057	0,0006	0,0000
12	1,0000	0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0661	0,0133	0,0018	0,0002
13	1,0000	0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,1163	0,0280	0,0045	0,0005
14	1,0000	0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,1878	0,0540	0,0104	0,0013
15	1,0000	1,0000	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,2801	0,0955	0,0220	0,0033
16	1,0000	1,0000	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,3889	0,1561	0,0427	0,0077
17	1,0000	1,0000	0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,5060	0,2369	0,0765	0,0164
18	1,0000	1,0000	0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,6216	0,3356	0,1273	0,0325
19	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9861	0,9152	0,7264	0,4465	0,1974	0,0595
20	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9937	0,9522	0,8139	0,5610	0,2862	0,1013
21	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9974	0,9749	0,8813	0,6701	0,3900	0,1611
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9877	0,9290	0,7660	0,5019	0,2399
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9944	0,9604	0,8438	0,6134	0,3359
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9793	0,9022	0,7160	0,4439
25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9900	0,9427	0,8034	0,5561
26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9955	0,9686	0,8721	0,6641
27	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9840	0,9220	0,7601
28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9924	0,9556	0,8389
29	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9966	0,9765	0,8987
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9986	0,9884	0,9405
31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9947	0,9675
32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9836
33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9923
34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967
35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987
36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Table 2

Loi de Poisson

$$P(X = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

(μ le nombre d'occurrences moyen)

x \ μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

x \ μ	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,2231	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,5578	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012	0,0005
2	0,8088	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062	0,0028
3	0,9344	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212	0,0103
4	0,9814	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550	0,0293
5	0,9955	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007	0,1912	0,1157	0,0671
6	0,9991	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3134	0,2068	0,1301
7	0,9998	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239	0,2202
8	1,0000	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557	0,3328
9	1,0000	1,0000	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874	0,4579
10	1,0000	1,0000	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060	0,5830
11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030	0,6968
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758	0,7916
13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9964	0,9872	0,9658	0,9261	0,8645
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9943	0,9827	0,9585	0,9165
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780	0,9513
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9963	0,9889	0,9730
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9947	0,9857
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9976	0,9928
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9989	0,9965
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984
21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Table 3

Loi Normale Centrée Réduite

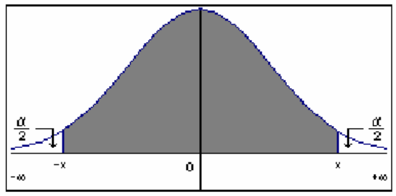
Fonction de répartition F(z)=P(Z<z)

Exemple : P(Z<1.96)= 0.97500 se trouve en ligne 1.9 et colonne 0.06

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56750	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59484	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67365	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69498	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72241
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76731	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78231	0,78524
0,8	0,78815	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82382	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84135	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90148
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93575	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95544	0,95637	0,95728	0,95819	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97933	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99897	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976

Table 4

Loi de Student



α	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
$1-\alpha$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
ν = ddl											
1	0,0000	0,3249	0,7265	1,3764	3,0777	6,3137	12,706	31,821	63,656	318,29	636,58
2	0,0000	0,2887	0,6172	1,0607	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250	22,328	31,600
3	0,0000	0,2767	0,5844	0,9785	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408	10,214	12,924
4	0,0000	0,2707	0,5686	0,9410	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041	7,1729	8,6101
5	0,0000	0,2672	0,5594	0,9195	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	5,8935	6,8685
6	0,0000	0,2648	0,5534	0,9057	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,2075	5,9587
7	0,0000	0,2632	0,5491	0,8960	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995	4,7853	5,4081
8	0,0000	0,2619	0,5459	0,8889	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	4,5008	5,0414
9	0,0000	0,2610	0,5435	0,8834	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,2969	4,7809
10	0,0000	0,2602	0,5415	0,8791	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,1437	4,5868
11	0,0000	0,2596	0,5399	0,8755	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,0248	4,4369
12	0,0000	0,2590	0,5386	0,8726	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178
13	0,0000	0,2586	0,5375	0,8702	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,8520	4,2209
14	0,0000	0,2582	0,5366	0,8681	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,7874	4,1403
15	0,0000	0,2579	0,5357	0,8662	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467	3,7329	4,0728
16	0,0000	0,2576	0,5350	0,8647	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,6861	4,0149
17	0,0000	0,2573	0,5344	0,8633	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,6458	3,9651
18	0,0000	0,2571	0,5338	0,8620	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,6105	3,9217
19	0,0000	0,2569	0,5333	0,8610	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,5793	3,8833
20	0,0000	0,2567	0,5329	0,8600	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,5518	3,8496
21	0,0000	0,2566	0,5325	0,8591	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,5271	3,8193
22	0,0000	0,2564	0,5321	0,8583	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,5050	3,7922
23	0,0000	0,2563	0,5317	0,8575	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,4850	3,7676
24	0,0000	0,2562	0,5314	0,8569	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970	3,4668	3,7454
25	0,0000	0,2561	0,5312	0,8562	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,4502	3,7251
26	0,0000	0,2560	0,5309	0,8557	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,4350	3,7067
27	0,0000	0,2559	0,5306	0,8551	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,4210	3,6895
28	0,0000	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,4082	3,6739
29	0,0000	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,3963	3,6595
30	0,0000	0,2556	0,5300	0,8538	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,3852	3,6460
40	0,0000	0,2550	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,3069	3,5510
50	0,0000	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,2614	3,4960
60	0,0000	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,2317	3,4602
70	0,0000	0,2543	0,5268	0,8468	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,2108	3,4350
80	0,0000	0,2542	0,5265	0,8461	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,1952	3,4164
90	0,0000	0,2541	0,5263	0,8456	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,1832	3,4019
100	0,0000	0,2540	0,5261	0,8452	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,1738	3,3905
200	0,0000	0,2537	0,5252	0,8434	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	3,1315	3,3398
∞	0,0000	0,2533	0,5244	0,8416	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0903	3,2906

Table 5

Loi du χ^2

$$P(\chi^2_\nu \geq \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$$

$1-\alpha$	**0,001**	**0,005**	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,5**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**	**0,999**
α	**0,999**	**0,995**	**0,99**	**0,975**	**0,95**	**0,9**	**0,5**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
ν = ddl													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	5,92	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,31
21	6,45	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	20,34	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	6,98	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	7,53	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	8,08	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	23,34	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	8,65	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	24,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	9,22	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	25,34	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	9,80	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65	55,48
28	10,39	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	10,99	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	11,59	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	29,34	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70

Pour $\nu > 30$, La loi du χ^2 peut –être approximée par la loi normale $N(\nu, \sqrt{\nu})$

Table 6

Loi de Fisher F

$$P(F_{\nu_1,\nu_2} < f_{\nu_1,\nu_2,\alpha}) = \alpha$$

$\alpha = 0{,}975$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50	100	200	500	•
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	985	993	1001	1008	1013	1016	1017	1018
2	38,5	39,0	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	14,0	14,0	13,9	13,9	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,66	8,56	8,46	8,38	8,32	8,29	8,27	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,43	6,33	6,23	6,14	6,08	6,05	6,03	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,27	5,17	5,07	4,98	4,92	4,88	4,86	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,57	4,47	4,36	4,28	4,21	4,18	4,16	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,10	4,00	3,89	3,81	3,74	3,70	3,68	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,77	3,67	3,56	3,47	3,40	3,37	3,35	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,52	3,42	3,31	3,22	3,15	3,12	3,09	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,33	3,23	3,12	3,03	2,96	2,92	2,90	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,18	3,07	2,96	2,87	2,80	2,76	2,74	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,05	2,95	2,84	2,74	2,67	2,63	2,61	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	2,95	2,84	2,73	2,64	2,56	2,53	2,50	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,86	2,76	2,64	2,55	2,47	2,44	2,41	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,79	2,68	2,57	2,47	2,40	2,36	2,33	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,72	2,62	2,50	2,41	2,33	2,29	2,26	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,67	2,56	2,44	2,35	2,27	2,23	2,20	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,62	2,51	2,39	2,30	2,22	2,18	2,15	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,57	2,46	2,35	2,25	2,17	2,13	2,10	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,50	2,39	2,27	2,17	2,09	2,05	2,02	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,44	2,33	2,21	2,11	2,02	1,98	1,95	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,39	2,28	2,16	2,05	1,97	1,92	1,90	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,34	2,23	2,11	2,01	1,92	1,88	1,85	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,31	2,20	2,07	1,97	1,88	1,84	1,81	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,18	2,07	1,94	1,83	1,74	1,69	1,66	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32	2,11	1,99	1,87	1,75	1,66	1,60	1,57	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,06	1,94	1,82	1,70	1,60	1,54	1,51	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,36	2,28	2,21	2,00	1,88	1,75	1,63	1,53	1,47	1,43	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	1,97	1,85	1,71	1,59	1,48	1,42	1,38	1,35
200	5,10	3,76	3,18	2,85	2,63	2,47	2,35	2,26	2,18	2,11	1,90	1,78	1,64	1,51	1,39	1,32	1,27	1,23
500	5,05	3,72	3,14	2,81	2,59	2,43	2,31	2,22	2,14	2,07	1,86	1,74	1,60	1,46	1,34	1,25	1,19	1,14
•	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,83	1,71	1,57	1,43	1,30	1,21	1,13	1,00

Loi de Fisher F (suite)

$$P(F_{\nu_1,\nu_2} < f_{\nu_1,\nu_2,\alpha}) = \alpha$$

$\alpha = 0,95$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50	100	200	500	•
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	246	248	250	252	253	254	254	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66	8,62	8,58	8,55	8,54	8,53	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80	5,75	5,70	5,66	5,65	5,64	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56	4,50	4,44	4,41	4,39	4,37	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87	3,81	3,75	3,71	3,69	3,68	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44	3,38	3,32	3,27	3,25	3,24	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15	3,08	3,02	2,97	2,95	2,94	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94	2,86	2,80	2,76	2,73	2,72	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77	2,70	2,64	2,59	2,56	2,55	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72	2,65	2,57	2,51	2,46	2,43	2,42	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54	2,47	2,40	2,35	2,32	2,31	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53	2,46	2,38	2,31	2,26	2,23	2,22	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39	2,31	2,24	2,19	2,16	2,14	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40	2,33	2,25	2,18	2,12	2,10	2,08	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28	2,19	2,12	2,07	2,04	2,02	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31	2,23	2,15	2,08	2,02	1,99	1,97	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19	2,11	2,04	1,98	1,95	1,93	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23	2,16	2,07	2,00	1,94	1,91	1,89	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12	2,04	1,97	1,91	1,88	1,86	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,15	2,07	1,98	1,91	1,85	1,82	1,80	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,11	2,03	1,94	1,86	1,80	1,77	1,75	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,07	1,99	1,90	1,82	1,76	1,73	1,71	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,04	1,96	1,87	1,79	1,73	1,69	1,67	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93	1,84	1,76	1,70	1,66	1,64	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,92	1,84	1,74	1,66	1,59	1,55	1,53	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,87	1,78	1,69	1,60	1,52	1,48	1,46	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,84	1,75	1,65	1,56	1,48	1,44	1,41	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,79	1,70	1,60	1,51	1,43	1,38	1,35	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,77	1,68	1,57	1,48	1,39	1,34	1,31	1,28
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,72	1,62	1,52	1,41	1,32	1,26	1,22	1,19
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,69	1,59	1,48	1,38	1,28	1,21	1,16	1,11
•	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,67	1,57	1,46	1,35	1,24	1,17	1,11	1,00

Bibliographie

[1] Ash. R., *Probability and measure theory*. Harcourt Academic Press. 2000.

[2] Barbe. P., and Ledoux. M., *Probabilité*. EDP Sciences. 2007.

[3] Bertsekas. P. and Tsitsiklis. J. N., *Introduction to Probability*. Course. 2000.

[4] Boukhari. F., *Probabilités*. Polycopié, Université aboubekr belkaid tlemcen. 2016.

[5] Cacoullos. T., *Exercises in Probability*. Springer-Verlag. 1989.

[6] Calot. G., *Cours de calcul des Probabilités*. Dunod. 1982.

[7] Féjoz. J., *Chapitres d'intégration et de probabilités*. 2014.

[8] François D., *Probabilité et statistiques*. 2ème édition, Dunod, 1997.

[9] Gordon. H., *Discrete Probability*. Springer-Verlag New York, Inc. 1997.

[10] Gut. A., Probability : *a graduate course*. Springer texts in statistics. 2005.

[11] Jacod. J., Protter. P., *Probability-Essentials*. Springer-Verlag. 2003.

[12] Jean-Yves. O., *Probabilités*. Tomes 1 et 2. Cassini, 2008.

[13] Kai Lai C., *A course in probability theory*. 3rd Edition, Academic Press, 2001.

[14] Laamri. E., *Mesures, intégration, convolution et transformée de fourier des fonctions-rappel de cours et exercices corrigés*. 2007.

[15] Lefebvre. M., *Basic Probability theory with applications*. Springer. 2000.

[16] Miri. S. E., *Algèbe et Analyse*. Polycopié, Université Abou Bekr Belkaid. 2013.

[17] Redjdal. K., *Cours de Probabilités*. O.P.U. 1995.

[18] Pierre. P., *Probabilités*. 2005.

[19] Olivier. G., *Mesure et Probabilités*. 2003.

[20] Thierry. G. and Raphaèle H., *Mesure et intégration*. 2004.

[21] Xavier. M., *Théorie de la Mesure et Intégration*. 2012.

[22] Velenik. Y., *Probabilités et Statistique*. 2016.

[23] William F., *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. 1. 3rd Edition, Wiley series in probabilities and mathematical statistics, 1968.